Exercices d'applications et de réflexions ***sur les nombres complexes (Partie 2)***
Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB 2ème BAC SM

NOMBRES COMPLEXES

Exercice1 : donner la forme exponentielle des complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i$ 2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1 \times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

Solution :1) $z_1 = 2+2i$ $|z_1| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Donc : $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ $|z_2| = \sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc : $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Donc : $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1 \times z_2$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $(z_2)^{12} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 2e^{-i12\frac{\pi}{3}} = 2e^{-4i\pi}$

Exercice2 : en utilisant la Formule de Moivre

1)montrer que : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Et que : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$

2)montrer que : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

Et que : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ $\forall\theta\in\mathbb{R}$

3)montrer que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Solutions :1)d'après Moivre on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

Et on a : $(\cos\theta+i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta$

Donc : $\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

Donc : $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

2) d'après Moivre on a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2 i\sin\theta + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

Donc :

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right) = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

Donc : $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

Et : $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)$$

Donc :

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Et $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

3)montrons que : $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$?

3) d'après Moivre on a :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + 4(\cos\theta)^3 i\sin\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta$

$-4i\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$

Donc : $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

Et $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Donc :

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + \left(1-\cos^2\theta\right)^2$

Finalement en a donc :

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Et que : $\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$

Exercice3 : Linéariser : $\cos^4\theta$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
triangle de Pascal

Solution : On a :

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 6ab^3 + b^4$

Donc : $\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(e^{4i\theta} + 3e^{3i\theta}e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + 3e^{2i\theta} + 6 + 3e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 3\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) + 6\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(2\cos 4\theta + 3\times 2\cos 2\theta + 6\right)$

Car $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

Donc : $\cos^4\theta = = \dfrac{1}{8}\left(\cos 4\theta + 3\cos 2\theta + 3\right)$

Donc : $\cos^4\theta = = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{3}{8}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$

Exercice4 :1)Montrer que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

2)on pose : $u = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $v = 3e^{i\frac{\pi}{7}}$ et $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$

Et $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$

Déterminer le module et l'argument du nombre complexes : $u+v$; u_1 et u_2

Solution :1) à vérifier

2)a) $u + v = 3e^{i\frac{\pi}{5}} + 3e^{i\frac{\pi}{7}} = 3\left(e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i\frac{\pi}{7}}\right)$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{14}\right)}\right)$$

$$u + v = 3e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{35}\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{35}\right)}\right)$$

$u + v = 6\cos\left(\dfrac{\pi}{35}\right)e^{i\left(\frac{6\pi}{35}\right)}$ et puisque

$6\cos\left(\dfrac{\pi}{35}\right) > 0$ alors : $|u+v| = 6\cos\left(\dfrac{\pi}{35}\right)$

Et $\arg(u+v) \equiv \dfrac{6\pi}{35}[2\pi]$

b) $u_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$u_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{6}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} + e^{-ni\theta} = 2\cos n\theta$

alors : $u_1 = \sqrt{3}\times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $|u_1| = \sqrt{3}$

Et $\arg(u_1) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

c) $u_2 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - \left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^2$

$$u_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right) = -2i\sin\frac{\pi}{6} \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Car : d'après Euler $e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i\,\text{sins}\, n\theta$

alors : $u_2 = -i \times e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ $\quad |u_2| = 1$

Et $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Et $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}[2\pi]$ donc : $\arg(u_2) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice5 :1) en utilisant la formule d'Euler

Montrer que : $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \theta \in \mathbb{R}$

2) Montrer que : $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$

3) Montrer que : $\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta \quad \theta \in \mathbb{R}$

4) Montrer que : $\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$

5) Linéariser : a) $\sin^5\theta$ b) $\cos^2\theta\sin^3\theta$

Solution :1)On a : $\cos^2 x = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{2i\theta} + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right) = \frac{1}{4}(2\cos 2\theta + 2) = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$$

2) $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$?

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 + 3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2 + \left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3} + 3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3} + e^{-i3\theta}\right) + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$ donc :

$$= \frac{1}{8}(2\cos 3\theta + 3\times 2\cos\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

3) $\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$?

On a : $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Donc :

$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3} - 3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta} - e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta = -\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3} - e^{-i3\theta}\right) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right)$$

Et on a : $2i\sin n\theta = e^{in\theta} - e^{-in\theta}$ donc :

$$= -\frac{1}{8i}(2i\sin 3\theta - 3\times 2i\sin\theta) = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

4) $\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$?

On a : $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ et $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sin^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4 - 4\left(e^{i\theta}\right)^3\cdot e^{-i\theta} + 6\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2 - 4\left(e^{i\theta}\right)^1\left(e^{-i\theta}\right)^3 + \left(e^{-i\theta}\right)^4\right)$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} - 4e^{3i\theta}\cdot e^{-i\theta} + 6e^{2i\theta}\cdot e^{-2i\theta} - 4e^{i\theta}\cdot e^{-3i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} - 4e^{2i\theta} + 6 - 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) + 6 + \left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}\right)\right)$$

On a : $e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$ donc :

$$\sin^4\theta = \frac{1}{16}(-4\times 2\cos 2\theta + 6 + 2\cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{8}(-4\cos 2\theta + 3 + \cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

5)a)On a :

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 106a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Donc : $\sin^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^5\left(e^{5i\theta} - 5e^{4i\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} - 10e^{2i\theta}e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} - e^{-5i\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}-10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta}\right)$$

$$=-\frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-5\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)+10\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\sin 5\theta-5\sin 3\theta+10\sin\theta\right)$$

Car $e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}=2i\sin n\theta$

Donc : $\sin^5 x = =-\frac{1}{16}\sin 5\theta+\frac{5}{16}\sin 3\theta-\frac{5}{8}\sin\theta$

5)b) $\cos^2\theta\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\times\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{4i\theta}-2+e^{-4i\theta}\right)\times\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right)-2\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{-32i}\left(2i\sin 5\theta-2i\sin 3\theta-2\times 2i\sin\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\sin 5\theta-\sin 3\theta-2\sin\theta\right)$$

Exercice6 :Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :1) $z_1=5$

2) $z_2=-4$ 3) $z_3=-3+4i$ 4) $z_4=-5-12i$

Solution : 1) $z_1=5=\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(-\sqrt{5}\right)^2$

Donc **:** les racines carrées de $z_1=5$ sont :

$\delta_1=\sqrt{5}$ et $\delta_2=-\sqrt{5}$

2) $z_2=-4=\left(2i\right)^2=\left(-2i\right)^2$

Donc **:** les racines carrées de $z_2=-4$ sont :

$\delta_1=2i$ et $\delta_2=-2i$

3) $z_3=-3+4i$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2=z_3$

On pose : $\delta=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2=|z_3|$

par suite : $\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=5 \\ 2xy=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm 1 \\ 2y^2=8 \Leftrightarrow y=\pm 2 \\ xy=2 \end{cases}$ et puisque $xy=2\succ 0$

donc : $\delta_1=1+2i$ et $\delta_2=-1-2i$

4) $z_4=-5-12i$

Soit δ les racine carrée de z_3 donc : $\delta^2=z_3$

On pose : $\delta=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = z_3$ et $|\delta|^2=|z_3|$

par suite : $\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=5 \\ 2xy=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm 1 \\ 2y^2=8 \Leftrightarrow y=\pm 2 \\ xy=2 \end{cases}$ et puisque $xy=2\succ 0$

donc : $\delta_1=1+2i$ et $\delta_2=-1-2i$

Exercice7 : Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $z_1=-12$ 2) $z_2=\cos\alpha-2$ 3) $z_3=4-2i$

4) $z_4=-4-3i$

Exercice8 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(E): z^2-z+2=0$

2) $(E): z^2-z-2=0$

3) $(E): z^2-2z+1=0$

4) $(1+i)z^2-(1+7i)z+14+12i=0$

Solution :1) $(E): z^2-z+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)=-7=(i\sqrt{7})^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Et $z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$

Donc : $S=\left\{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) $(E): z^2-z-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(-2)=9=(3)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{1-3}{2}=-1$ e

$z_2=\frac{1+3}{2}=2$

Donc : $S=\{-1;2\}$

3) $(E): z^2-2z+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4=0$

L'équation (E) admet comme solution le complexe $z=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$ donc : $S=\{1\}$

4) $(1+i)z^2-(1+7i)z+14+12i=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-(1+7i))^2-4(1+i)(14+12i)=0$

$\Delta=-56-90i$

On va Déterminer les racines carrées de Δ

Soit δ une racine carrée de Δ donc : $\delta^2=\Delta$

On pose : $\delta=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Donc : $\delta^2=x^2-y^2+2ixy=z_3$ et $|\delta|^2=|\Delta|$

par suite : $\begin{cases} x^2-y^2=-55 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-56)^2+(-90)^2}=106 \\ 2xy=-90 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=50 \Leftrightarrow x=\pm 5 \\ y^2=81 \Leftrightarrow y=\pm 9 \\ xy=-45 \end{cases}$ et puisque $xy=-45\prec 0$

donc : $\delta_1=5-9i$ et $\delta_2=-5+9i$

donc : $\delta=5-9i$ est une racine carrées de Δ

Donc les solutions sont :

$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{1+7i+5-9i}{2(1+i)}$

et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{1+7i-5+9i}{2(1+i)}$

donc : $z_1=1-2i$ et $z_2=3+5i$

donc : $S=\{1-2i;3+5i\}$

Exercice9 : soit $z\in\mathbb{C}$ on pose :

$P(z)=z^2-2z+2$

1)calculer : $P(1-i)$

2)en déduire dans $\mathbb{C}$ la résolution de l'équations $P(z)=0$

Solution :1)

$P(1-i)=(1-i)^2-2(1-i)+2=-2i-2+2i+2=0$

Donc $z_1=1-i$ est une racine de de l'équations $P(z)=0$ et on a : $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ donc :

$1-i+z_2=-\frac{-2}{1}$ donc $z_2=2+i-1=1+i$

Par suite : $S=\{1-i;1+i\}$

Exercice10 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$

2) $z^2-6z+13=0$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos 2\theta)z+i\sin\theta=0$ avec : $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Solution :

1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ ssi $z^2-4=0$ ou $z^2+9=0$

Ssi $z^2=4$ ou $z^2=-9$

Ssi $z=\sqrt{4}$ ou $z=-\sqrt{4}$ ou $z=\sqrt{9}i$ ou $z=-\sqrt{9}i$

Ssi : $z=2$ ou $z=-2$ ou $z=3i$ ou $z=-3i$

Donc : $S=\{-3i;3i;-2;2\}$

2) $z^2-6z+13=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(13)=36-52=(4i)^2$

Donc les solutions sont : $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$

Et $z_2=\overline{z_1}=3-2i$ donc : $S=\{3-2i;3+2i\}$

3) $(4\cos\theta)z^2-2(\cos 2\theta)z+i\sin\theta=0$

$\Delta=(2(\cos 2\theta))^2-4(4\cos\theta)(\sin\theta)i$

$\Delta=4\cos^2 2\theta-16i\cos\theta\sin\theta$

$\Delta=4\left(\cos^2 2\theta-4i\cos\theta\sin\theta\right)$

On a : $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$ et $\cos^2 2\theta=1-\sin^2 2\theta$

Donc : $\Delta=4\left(1^2+i^2\times\sin^2 2\theta-2i\sin 2\theta\right)$

Donc : $\Delta=(2(1-i\sin 2\theta))^2$

les solutions sont : $z_1=\frac{2(\cos 2\theta)+2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

et : $z_2=\frac{2(\cos 2\theta)-2(1-i\sin 2\theta)}{2(4\cos\theta)}$

les solutions sont : $z_1=\frac{\cos 2\theta+1-i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et : $z_2=\frac{\cos 2\theta-1+i\sin 2\theta}{4\cos\theta}$

et on a : $\cos 2\theta-1=-2\sin^2\theta$ et $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$

donc : $z_1=\frac{2\cos^2\theta-i2\sin\theta\cos\theta}{4\cos\theta}=\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{2}$

et $z_2=\frac{-\sin^2\theta+i\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$

Exercice11 :Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : 1) $z^2+2z+5=0$ 2) $2z^2+3iz+(1-i)=0$

3) $3iz^2+(1-2i)z+5i+1=0$

Exercice12 :1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$z^2-8z+17=0$

2) Soit $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$

a) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur unique comme solution.

b)déterminer les réels $a;b;c$ tels que :

$P(z)=(z+i)\left(az^2+bz+c\right)$

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z)=0$

Solution :1) $z^2-8z+17=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(17)=64-68=(2i)^2$

les solutions sont : $z_1=\frac{8+2i}{2}=4+i$ et $z_2=\overline{z_1}=4-i$

donc : $S=\{4-i;4+i\}$

2)a)soit $z_0=bi$ une solution imaginaire pur de l'équation $P(z)=0$ donc :

$z_0^3+(-8+i)z_0^2+(17-8i)z_0+17i=0$

Donc : $(bi)^3+(-8+i)(bi)^2+(17-8i)(bi)+17i=0$

Donc : $-ib^3-(-8+i)b^2+17bi+8b+17i=0$

Donc : $-ib^3+8b^2-ib^2+17bi+8b+17i=0$

Donc : $8b^2+8b+i\left(-b^3-b^2+17b+17\right)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}8b^2+8b=0\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8b(b+1)=0\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=0 ou b=-1\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$

$b=0$ ne vérifies pas $-b^3-b^2+17b+17=0$

Car $-0^3-0^2+170+17\neq 0$

$b=-1$ vérifies $-b^3-b^2+17b+17=0$ car :

$-(-1)^3-(-1)^2+\ 17(-1)+17=0$

Donc : $\boldsymbol{b}=-1$ donc : $z_0=(-1)\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}$ est l'unique solution imaginaire pur de l'équation $P(z)=0$

2)b) $(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{az}^2+\boldsymbol{bz}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{az}^3+\boldsymbol{bz}^2+\boldsymbol{cz}+\boldsymbol{aiz}^2+\boldsymbol{biz}+\boldsymbol{ci}$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{az}^3+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{ai})\boldsymbol{z}^2+(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{bi})\boldsymbol{z}+\boldsymbol{ci}$$

Et on a : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{z}^3+(-8+\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}^2+\ (17-8\boldsymbol{i})\boldsymbol{z}+17\boldsymbol{i}$

Donc : $\begin{cases}\boldsymbol{a}=1\\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{ai}=-8+\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{bi}=17-8\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{ci}=17\boldsymbol{i}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{a}=1\\ \boldsymbol{b}=-8\\ \boldsymbol{c}-8\boldsymbol{i}=17-8\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{c}=17\end{cases}$

donc : $\boldsymbol{a}=1$ et $\boldsymbol{b}=-8$ et $\boldsymbol{c}=17$

Donc : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17)$

2)c) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i})(\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17)=0$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{z}^2-8\boldsymbol{z}+17=0$ ou $\boldsymbol{z}+\boldsymbol{i}=0$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{z}_1=4+\boldsymbol{i}$ ou $z_2=4-i$ ou $\boldsymbol{z}_0=-\boldsymbol{i}$

Donc : $S=\{4-i;4+i;-i\}$

Exercice13 :

Soit $P(z)=z^3+\left(\sqrt{3}-i\right)z^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)z-i=0$

1. Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur comme racine.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 14: soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

Soit $(E): z^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)z-8=0$

1) Montrer que 2 est une solution de l'équation (E)
2) monter que :

$z^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)z-8=(z-2)\left(z^2+2\sqrt{3}z+4\right)$

3)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Solution :

1) $2^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)2^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)2-8=8+8\left(\sqrt{3}-1\right)8+8\left(1-\sqrt{3}\right)-8$

$=8+8\sqrt{3}-8+8-8\sqrt{3}-8=0$

Donc : 2 est une solution de l'équation (E)

2) $(z-2)\left(z^2+2\sqrt{3}z+4\right)=z^3+2\sqrt{3}z^2+4z-2z^2-4\sqrt{3}z-8$

$=z^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)z-8$

3) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z})=0\Leftrightarrow(\boldsymbol{z}-2)\left(\boldsymbol{z}^2+2\sqrt{3}\boldsymbol{z}+4\right)=0$

$\Leftrightarrow\boldsymbol{z}^2+2\sqrt{3}\boldsymbol{z}+4=0$ ou $\boldsymbol{z}-2=0$

On va résoudre : $\boldsymbol{z}^2+2\sqrt{3}\boldsymbol{z}+4=0$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4(4)=12-16=(2i)^2$

Donc les solutions de l'équation $\boldsymbol{z}^2+2\sqrt{3}\boldsymbol{z}+4=0$

$z_1=\dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i$

Donc les solutions de l'équation (E) sont :

$z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$ et $z_0=2$

Donc : $S=\left\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;2\right\}$

Exercice 15: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $2Z^2-2Z+5=0$ 2) $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

Solutions :1) $2Z^2-2Z+5=0$ $\Delta=-36$

Donc : $z_1=\dfrac{2-i\sqrt{36}}{4}$; $z_2=\dfrac{2+i\sqrt{36}}{4}$

Donc : $\boxed{S=\left\{\dfrac{1-3i}{2}\ ;\ \dfrac{1+3i}{2}\right\}}$

2) $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

On remarque que 2 est solution

donc : $3Z^3-3Z^2+2Z-2$ est divisible par **:** $z-1$

La division euclidienne de $3Z^3-3Z^2+2Z-2$ par :

$z-1$ nous donne : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=(Z-1)\left(3Z^2+2\right)$

$3Z^2+2=0\Leftrightarrow Z^2=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $Z=i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Donc les solutions de : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

sont : $Z=1$ ou $Z=i\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $Z=-i\sqrt{\frac{2}{3}}$

Donc : $\boxed{S=\left\{1;i\sqrt{\frac{2}{3}};-i\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}}$

Exercice16 : soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E)

$P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i=0$

1) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet un imaginaire pur z_0 à déterminer

2)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Solution :1)$P(z)=0$ admet un imaginaire pur

$z_0=ib$ Avec $b\in\mathbb{R}$

$$P(z_0)=0\Leftrightarrow (ib)^3-(16-i)(ib)^2+(89-16i)ib+89i=0$$
$$\Leftrightarrow 16b^2+16b+i\left(-b^3-b^2+89b+89\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}16b^2+16b=0\\ -b^3-b^2+89b+89=0\end{cases}$$

$\boxed{P(z_0)=0\Leftrightarrow b=-1}$

Donc : $P(Z)=0$ admet un imaginaire pur $z_0=-i$

2) $z_0=-i$ est une racine de $P(z)$

donc : $P(z)$ est divisible par **:** $z+i$

donc **:** $P(Z)=(z+i)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$

$P(Z)=z^3+(i+\alpha)z^2+(\alpha i+\beta)z+\beta i$

Et on a : $P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

Donc : $\boxed{\alpha=-16}$ et $\boxed{\beta=89}$

Donc : $P(Z)=(z+i)\left(z^2-16z+89\right)$

On va résoudre l'équation : $z^2-16z+89=0$

$\Delta=-100$ donc : $z_1=8-5i$ et $z_2=8+5i$

Donc : les solutions de (E) : $S=\{-i;8-5i;8+5i\}$

Exercice17 : soit : $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1)Donner la forme exponentielle et la forme algébrique du nombre complexes z

2)en déduire : $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Solution :1) $z=e^{-i\pi}\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}=e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$$z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=-\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{4}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

$\boxed{z=\frac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}+i\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}}$

2) $\sin\frac{-11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$ et $\cos\frac{-11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$

Donc : $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$ et $\boxed{\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}}$

Exercice18 : déterminer Les racines 4éme de l'unité

Solution : Les racines 4éme de l'unité sont :

$u_k=e^{\frac{k\pi}{2}i}$ Où $k\in\{0,1,2,3\}$

1) $u_0=e^{\frac{0\pi}{2}i}=e^0=1$ 2) $u_1=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

3) $u_2=e^{\pi i}=-1$ 4) $u_3=e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i$

Exercice19 : Ecrire sous les formes algébriques les racines 6i$\grave{e}me$ de l'unité.

Exercice 20: Considérons l'équation : (E) :

$z^6=\overline{z}$ 1)Montrer que si $z\neq 0$ et z solution de (E)

Alors $|z|=1$

2- Résoudre l'équation (E)

Exercice 21 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$

2) Ecrire les solutions sous leurs formes algébriques et déterminer :

$cos\ (\pi/12)$ et $sin\ (\pi/12)$.

Exercice22 :1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-\sqrt{3}iz-1-\sqrt{3}i=0$$

2) En déduire sous les formes trigonométriques et algébriques les solutions de l'équation :

$$z^6-\sqrt{3}iz^3-1-\sqrt{3}i=0$$

Exercice23 : Dans le plan complexe $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points : A ;B ;C d'affixe respectivement $z_A = 3+5i$; $z_B = 3-5i$; $z_C = 7+3i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la translation $t_{\vec{u}}$ tel que $aff(\vec{u}\ ) = 4-2i$

1)montrer que : $z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$**)**

2) verifier que le Point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3) déterminer $z_{B'}$ l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$

Solution:1) $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

$\Leftrightarrow z_{M'}-z_M=z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z_{M'}=z_M+z_{\vec{u}} \Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{u}}$

$\Leftrightarrow z'=z+4-2i$ (l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$**)**

2)on a : $z_A = 3+5i$

Donc : $z' = 3+5i+4-2i$

Donc : $z' = 7+3i = z_C$

Donc: le point C est l'image de A par $t_{\vec{u}}$

3)on a : $z_B = 3-5i$ Donc : $z' = 3-5i+4-2i$

$\Leftrightarrow z' = 7-7i = z_{B'}$

Donc l'affixe de B' l'image de B par la translation $t_{\vec{u}}$ est $z_{B'}=7-7i$

Exercice24:

1- Donner l'écriture complexe de la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du Point $C(-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$ par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Exercice25 : Dans le plan complexe $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le points : A d'affixe $z_A = 3+5i$ et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par l'homothétie de centre $\Omega(3;-2)$) et de Rapport $k=4$

1)montrer que : $z'=4z-9+6i$ (l'écriture complexe de l'homothétie $h(\Omega,k)$**)**

2) déterminer $z_{A'}$ l'affixe de A' l'image de A par l'homothétie $h(\Omega,k)$

Solution:1) $h_{(\Omega;k)}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z_{M'}=kz_M+z_\Omega(1-k)$

$\Leftrightarrow z'=4z+z_\Omega(1-4) \Leftrightarrow z'=4z-3(3-2i)$

$\Leftrightarrow z'=4z-9+6i$

2) on a : $z_A = 3+5i$ et $z'=4z-9+6i$

Donc : $z'=4\left(3+5i\right)-9+6i$

Donc $z_{A'}=3+26i$

Exercice 26:

1- Donner l'écriture complexe de l'homothétie de rapport 2 et qui transforme $A(1-2i)$ en $B(-4+3i)$

2- Déterminer l'image du point $C(-1+5i)$ par l'homothétie h.

Exercice27 : Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points : A ;B d'affixe respectivement $z_A = 7+2i$; $z_B = 4+8i$

Et soit z' l'affixe de M' l'image de M (z) par la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)montrer que : $z' = iz + 4i + 12$ (l'écriture complexe de la rotation r **)**

2) montrer que l'affixe du point C l'image de A par la rotation r est $z_C = 10 + 11i$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = e^{i\alpha}(z_M - z_B) + z_B$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 4 - 8i) + 4 + 8i$

$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z - 4 - 8i) + z$

$\Leftrightarrow z' = i(z - 4 - 8i) + 4 + 8i$

$\Leftrightarrow z' = iz - 4i + 8 + 4 + 8i$

$\Leftrightarrow z' = iz + 4i + 12$

2)on a : $z_A = 7 + 2i$

Donc : $z' = i(7 + 2i) + 4i + 12$

Donc : $z' = 7i - 2 + 4i + 12 = 11i + 10$ cqfd

Exercice 28:Déterminer l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω (1+i) et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{3\pi}{4}}(z - 1 - i) + 1 + i$

$\Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)(z - 1 - i) + 1 + i$

$\Leftrightarrow z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - 1 - i) + 1 + i$

$\Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)z + \sqrt{2} + 1 + i$

Exercice29 : Soit la rotation r de centre **Ω** (i) et transforme O en $O'\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Déterminer L'angle de cette rotation

Solution : $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\alpha}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

$\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - i) + i$

Et puisque : $r(O) = O'$ alors : $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\theta}(0 - i) + i$

$\Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{0 - i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Donc : $\theta \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]$

L'angle de cette rotation est $-\frac{\pi}{3}$

Exercice30 :

1- Montrer qu'il existe une rotation R de centre Ω(3+i) qui transforme A(2+4i) en B(6+2i)

2- Donner l'écriture complexe de la rotation R

3- Déterminer l'image de C(−1+3i)

Exercice 31: Soit f une transformation plane qui transforme $M(z)$ en M' (z') tel que

$z' = -2z + 3 - 3i$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques

Solution : Soit : $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :Le point Ω(ω) est un point invariant par f: $\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3-3i}{3} = 1 - i$

D'où: $\begin{cases} z' = -2z + 3 - 3i \\ \omega = -2\omega + 3 - 3i \end{cases}$ en faisant la différence on obtient : $z' - \omega = -2(z - \omega)$ qui se traduit par

$\overrightarrow{\Omega M'} = -2\overrightarrow{\Omega M}$ Donc :f est l'homothétie de centre Ω(ω= $1 - i$) et de Rapport -2

Exercice 32 : Soit u un complexe non nul, et f la transformation plane qui transforme $M(z)$ en M' (z') tel que : $z' = uz + i - \bar{u}$

Déterminer la nature de la transformation f et ses éléments caractéristiques dans chacun des cas suivant :1) u = 1 2) u = −3

3) $u = j$ 4) $\boldsymbol{u} = 4 - 4\sqrt{3}\boldsymbol{i}$

Exercice 33 : Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le point : A (i) et la rotation R_0 de centre O (0) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et soit R_1 la rotation de centre A (i) et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Déterminer la nature de la transformation $R_1 \circ R_0$ et ses éléments caractéristiques

Solution : soit un point M (z)

On pose : $R_0(M) = M'(z')$ **et** $R_1(M') = M''(z'')$

$$R_0(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}\left(z - z_O\right) + z_O$$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z \text{ Car } z_O = 0$$

Et on a : $R_1(M') = M''(z'') \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z' - z_A\right) + z_A$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}z - i\right) + i \Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z'' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \Leftrightarrow z'' = iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On sait que la composée de deux rotation est une rotation ($\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi$)

Déterminons le centre de la rotation : $R_1 \circ R_0$ **?**

Le centre de la rotation est le point invariant :

$$\omega = i\omega + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Leftrightarrow \omega(1 - i) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Donc : $\omega = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

On a **:** $\arg i = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

L'angle de la rotation est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 34 : soit ABC un triangle isocèle et rectangle on A tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

et soit R la rotation de centre A et qui transforme B en C et soit la translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$

Déterminer : $F_1 = R \circ T$ **et** $F_2 = T \circ R$

Solution : on considère $\left(\boldsymbol{A};\overrightarrow{\boldsymbol{AB}},\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\right)$ comme repére normé donc : L'angle de la rotation R est : $\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$

donc : R la rotation de centre A (0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$

donc : $R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z - z_A\right) + z_A$

Donc l'écriture complexe de la rotation R est .

$R(M) = M'(z') \Leftrightarrow z' = iz$

l'écriture complexe de la translation translation $T = t_{\overrightarrow{AB}}$ est: $z'' = z + 1$

soit un point M (z) : on pose : $F_1(M) = M_1(z_1)$

et $F_2(M) = M_2(z_2)$

on a donc : $z_1 = i(z+1)$ et $z_2 = iz + 1$

on a : pour F_1 **:** $z = i(z+1) \Leftrightarrow (1-i)z = i$

$$z = \frac{i}{1-i} = \frac{-1+i}{2}$$

pour F_1 le seul point invariant est

$\Omega_1\left(\omega_1 = \frac{-1+i}{2}\right)$ et on a :

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}z + \omega_1\left(1 - e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$$

donc F_1 est la rotation de centre $\Omega_1\left(\omega_1=\frac{-1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

De même : pour F_2 le seul point invariant est

$\Omega_2\left(\omega_2=\frac{1+i}{2}\right)$ et on a : $z_2=e^{\frac{\pi}{2}i}z+\omega_2\left(1-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

donc F_2 est la rotation de centre : $\Omega_2\left(\omega_2=\frac{1+i}{2}\right)$

et d'angle : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 35 : Exercice 35 : Dans le plan complexe direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le point : A (2) et soit φ une transformation qui transforme $M(z)$ en M_2 (z_2) tel que $z_2=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et soit H l'homothétie de centre A (2) et de Rapport $k=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Et soit : $f=\varphi\circ H$

1) montrer que f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle

2) montrer que $f\circ H^{-1}=\varphi$

Solution :1)

On a : $A=\varphi(A)$ à verifier(A est le seul point invariant par φ)donc :l'écriture complexe de l'homothétie H est : $z_1=\frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)+2$

Pour tout point $M(z)$ soit $f(M)=M'$ et $M'(z')$

On a : $z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_1+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et on peut l'écrire sous forme: $z'-2=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}(z_1-2)$

et puisque: $z_1-2=\frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)$

alors : $z'-2=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}(z-2)$

Donc: $z'-2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}(z-2)$ et puisque: $\frac{\sqrt{3}+i}{2}=e^{\frac{\pi}{6}i}$

alors : $z'-2=e^{\frac{\pi}{6}i}(z-2)$

donc : f est une rotation de centre A (2) d'angle $\frac{\pi}{6}$

2)puisque: $f=\varphi\circ H$ alors: $f\circ H^{-1}=(\varphi\circ H)\circ H^{-1}$

cad $f\circ H^{-1}=\varphi\circ\left(H\circ H^{-1}\right)$ et et puisque:

$H\circ H^{-1}=I_P$ alors: $f\circ H^{-1}=\varphi$

finalement φ est la composée de la rotation de centre A (2) et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et l'homothétie H de centre A (2) et de Rapport $k=\frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 36 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit a un complexe non nul ; Pour tout nombre z de $\mathbb{C}\setminus\{a\}$, on pose : $f_a(z)=z'=\frac{az}{z-a}$

1. Montrer que :

$f_a(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow |z|^2\mathcal{R}e(a)=|a|^2\mathcal{R}e(z)$

2. Soit z un élément de $\mathbb{C}^*\setminus\{a\}$

on pose : $|z-a|=r$ et $\arg(z-a)\equiv\theta\ [2\pi]$

a. Calculer $|f_a(z) - a|$ en fonction de r est $|a|$

b. Calculer $arg(f_a(z) - a)$ en fonction de θ er r.

3. on pose $a = -1 + i$ et considérons les ensembles des points $M(z)$ définis par :

$(D) = \{M(z); \arg(z - a) \equiv \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\}$

$(\mathcal{C}) = \{M(z); |f_a(z) - a| = 2\}$

$(\mathcal{E}) = \{M(z);\ f_a(z) \in i\mathbb{R}\}$

a) Déterminer les ensembles $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{C})$ et montrer que (D) est une demi droite d'origine $A(a)$ privée de A et déterminer son équation cartésienne.

b) soit z_0 un élément de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$,et $B(z_0)$ tel que $B \in (D) \cap (\mathcal{C})$; écrire $f_a(z_0)$ sous sa forme algébrique puis déterminer z_0

c) Construire les ensembles (D); $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{E})$.

4) Déterminer la représentation complexe de la rotation ρ de centre a et d'angle $\frac{\pi}{3}$

5) Déterminer la représentation complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a.

6. Déterminer la transformation $to\rho$ et ses éléments caractéristiques.

Exercice 37 : soit z un nombre complexe non nul

Montrer que : $|z-1| \le ||z|-1| + |z||\arg z|$

Solution : soit $z \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$|z-1| = |z-|z| + (|z|-1)| \le |z-|z|| + ||z|-1|$$

On pose : $z = \mathrm{R}e^{i\theta}$ avec $\mathrm{R} \succ 0$

On a : $|z-|z|| = |\mathrm{R}e^{i\theta} - R| = \mathrm{R}|e^{i\theta} - 1|$

$$= \mathrm{R}\left|\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 - e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}\right| = \mathrm{R}\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right|$$

Donc : $|z-|z|| = 2\mathrm{R}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

Or on sait que : $|\sin x| \le |x|\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $|z-|z|| \le |z||\theta| = |z||\arg z|$

Donc : $|z-1| \le ||z|-1| + |z||\arg z|$

Exercice38 :soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$

et $a \ne c$ et $b \ne c$

1)Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}}\right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$

On a si : $|z| = 1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice39 :soit le nombre complexe $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

1)Montrer que les nombres S et T sont conjugués

2) Montrer que : $\operatorname{Im}(S) \succ 0$

3)calculer $S+T$ et $S \times T$

4)en déduire les nombres S et T

Solution : on a : $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ donc $z^7 = 1$

1) $\overline{S} = \overline{z} + \overline{z}^2 + \overline{z}^4$

On a si : $|z| = 1$ alors : $\overline{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$\overline{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4}$ et on a $z^7 = 1$

Donc : $z^6 = \frac{1}{z}$ et $z^5 = \frac{1}{z^2}$ et $z^3 = \frac{1}{z^4}$

Donc : $\overline{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} = z^3 + z^5 + z^6 = T$

Donc : les nombres S et T sont conjugués

2) Montrons que : $\operatorname{Im}(S) \succ 0$?

On a : $S = z + z^2 + z^4$ et $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$

Donc $\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}$

$\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)$

$\operatorname{Im}(S) = \sin\frac{2\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7}$ puisque : $\frac{\pi}{7} \prec \frac{2\pi}{7} \prec \frac{\pi}{2}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{7} \prec \sin\frac{2\pi}{7}$ et on a $\sin\frac{4\pi}{7} \succ 0$

Donc : $\operatorname{Im}(S) \succ 0$

3)calculons $S+T$ et $S \times T$?

$S + T = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

$S + T = \left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right) - 1$

$S + T = \frac{1 - z^7}{1 - z} - 1 = -1$ car $z^7 = 1$

$S \times T = \left(z + z^2 + z^4\right)\left(z^3 + z^5 + z^6\right)$

$S \times T = z^4 + z^6 + z^7 + z^5 + z^7 + z^8 + z^7 + z^9 + z^{10}$

$S \times T = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}$

On a $z^7 = 1$ donc : $z^8 = z$ et $z^9 = z^2$ et $z^{10} = z^3$

donc : $S \times T = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + 2$

$S \times T = \frac{1 - z^7}{1 - z} + 2 = 2$ car : $z^7 = 1$

4)on a $S + T = -1$ et $S \times T = 2$ donc S et T sont les solutions de l'équation : $x^2 + 1x + 2 = 0$

$\Delta = -7 = \left(\sqrt{7}i\right)^2$

En résolvant l'équation on trouve :

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ et $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$ et on a $\operatorname{Im}(S) \succ 0$

Donc : $S = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$ et $T = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}$

Exercice40 : Soit

$P(z) = (i - 1)z^3 - (5i - 11)z^2 - (43 + i)z + 9 + 37i$

1) Montrer que l'équation $(\boldsymbol{E})$: $P(z) = 0$ admet un imaginaire pur z_0 unique comme solution

2)déterminer les nombres complexes $a;b;c$ tels que : $P(z)=(z-z_0)(az^2+bz+c)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Solution :1) soit $z_0=\lambda i$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ une solution imaginaire pur de l'équation $P(z)=0$ donc :

$$(i-1)z_0^3-(5i-11)z_0^2-(43+i)z_0+9+37i=0$$

$$(i-1)(\lambda i)^3-(5i-11)(\lambda i)^2-\lambda i(43+i)+9+37i=0$$

Donc :

$$\left(\lambda^3-11\lambda^2+\lambda+9\right)+i\left(\lambda^3+5\lambda^2-43\lambda+37\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda^3-11\lambda^2+\lambda+9=0\\ \lambda^3+5\lambda^2-43\lambda+37=0\end{cases}$$

On remarque que 1 est l'unique solution du système donc : $z_0=i$ est la solution imaginaire pur de l'équation $P(z)=0$

2) $z_0=i$ est une racine de $P(z)$ donc $P(z)$

Est divisible par $z-i$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par $z-i$ on trouve :

$$P(z)=(z-i)\left((i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i\right)$$

Donc : $a=i-1$ et $b=10-6i$ et $c=-37+9i$

3)

$$P(z)=0\Leftrightarrow(z-i)\left((i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i=0 \text{ ou } z-i=0$$

On va résoudre l'équation :

$$(i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i=0\ (F)$$

$$\Delta'=(5-3i)^2-(i-1)(-37+9i)=-12+16i$$

$$\Delta'=-12+2\times4\times2i=(4i)^2+2\times2\times4i+(2)^2=(2+4i)^2$$

Donc : une racine carrée de Δ' est : $2+4i$

Donc : les solutions de (F) sont :

$z_1=5-2i$ ou $z_2=3+4i$

Donc les solutions de (E). sont :

$S=\{5-2i;3+4i;i\}$

Exercice41 : Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E)\ 2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i=0$$

1) Montrer que l'équation (E): $P(z)=0$ admet une solution réelle z_0 à déterminer

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Solution :1) soit $z_0=\lambda$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ une solution réelle de l'équation (E).donc :

$$2\lambda^3-(1+2i)\lambda^2+(25i-1)\lambda+13i=0$$

Donc : $\left(2\lambda^3-\lambda^2-\lambda\right)+i\left(-2\lambda^2+25\lambda+13\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\lambda^3-\lambda^2-\lambda=0\\ -2\lambda^2+25\lambda+13=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\,\boldsymbol{ou}\,\lambda=-\dfrac{1}{2}\,\boldsymbol{ou}\,\lambda=1\\ -2\lambda^2+25\lambda+13=0\end{cases}$$

On remarque que $\lambda=-\frac{1}{2}$ le seul vérifiant

$-2\lambda^2+25\lambda+13=0$ donc solution du système

donc : $z_0=-\frac{1}{2}$ est la solution réelle de L'équation (E)

2)on pose :

$$P(z)=2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i$$

$z_0=-\frac{1}{2}$ est une racine de $P(z)$

donc $P(z)$ est divisible par $z+\frac{1}{2}$

en faisant la division euclidienne de $P(z)$ par

$z+\frac{1}{2}$ on trouve :

$$P(z)=2\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2-(1+i)z+13i\right)$$

$$P(z)=0 \Leftrightarrow 2\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2-(1+i)z+13i\right)=0$$

On va résoudre l'équation :

$z^2-(1+i)z+13i=0\ (F)$

$$\Delta=(1+i)^2-52i=-50i=\left(5(1-i)\right)^2$$

Donc : une racine carrée de Δ est : $5(1-i)$

Donc : les solutions de (F) sont :

$z_1=-2+3i$ ou $z_2=3-2i$

Donc les solutions de (E). sont :

$$S=\left\{-2+3i;3-2i;-\frac{1}{2}\right\}$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien