

**Exercice 1**

Soit  $\perp$  la loi interne définie sur  $\mathbb{Z}$  par :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2) \quad x \perp y = x + y - 2$$

- 1) montrer que  $\perp$  est commutative ,  
associative dans  $\mathbb{Z}$
- 2) montrer que  $\perp$  admet un élément neutre
- 3) montrer que tout élément  $x$  de  $\mathbb{Z}$  admet  
un symétrique dans  $\mathbb{Z}$

**Exercice 2**

On pose  $I = ]1, +\infty[$  .

On considère dans  $I$  la loi  $\perp$  telle que :

$$(\forall (x, y) \in I^2) \quad x \perp y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$$

- 1) montrer que  $\perp$  est interne dans  $I$
- 2) a) étudier la commutativité de  $\perp$   
b) montrer que  $\perp$  est associative
- 3) montrer que  $\perp$  admet un élément neutre

**Exercice 3**

Soit  $a$  un réel strictement positif ,

on pose  $I = ]a, +\infty[$  .

On considère dans  $I$  la loi  $*$  telle que :

$$(\forall (x, y) \in I^2) \quad x * y = (x - a)(y - a) + a$$

- 1) montrer que  $*$  est interne dans  $I$
- 2) a) étudier la commutativité de la loi  $*$   
b) montrer que  $*$  est associative
- 3) montrer que  $*$  admet un élément neutre
- 4) montrer que  $J = ]a + 1, +\infty[$  est stable  
dans  $(I, *)$

5) pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 2$

on pose  $x^{(n)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois } x}$

Montrer que  $(\forall n \geq 2) \quad x^{(n)} = (x - a)^n + a$

**Exercice 4**

On considère dans  $\mathbb{R}$  la loi interne  $T$  telle

que :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) \quad xTy = xy - x - y + 2$

- 1) a) étudier la commutativité de  $T$   
b) la loi  $T$  est-elle associative ?
- 3) montrer que  $T$  admet un élément neutre
- 4) montrer que  $I = ]1, +\infty[$  est une partie  
stable pour la loi  $T$  dans  $\mathbb{R}$
- 5) montrer que tout  $x$  de  $I$  admet un  
symétrique  $x'$  pour la loi  $T$  dans  $I$

**Exercice 5**

On pose  $E = ]-1, 1[$  .

On considère dans  $E$  la loi  $T$  telle que :

$$(\forall (x, y) \in E^2) \quad xTy = \frac{x + y}{1 + xy}$$

- 1) montrer que  $T$  est interne dans  $E$
- 2) a) étudier la commutativité de  $T$   
b) montrer que  $T$  est associative
- 3) montrer que  $(E, T)$  est un groupe  
commutatif