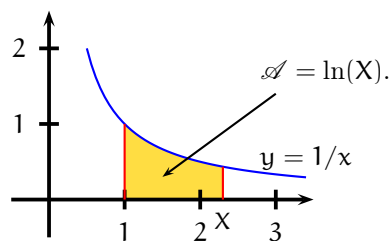


# La fonction logarithme népérien

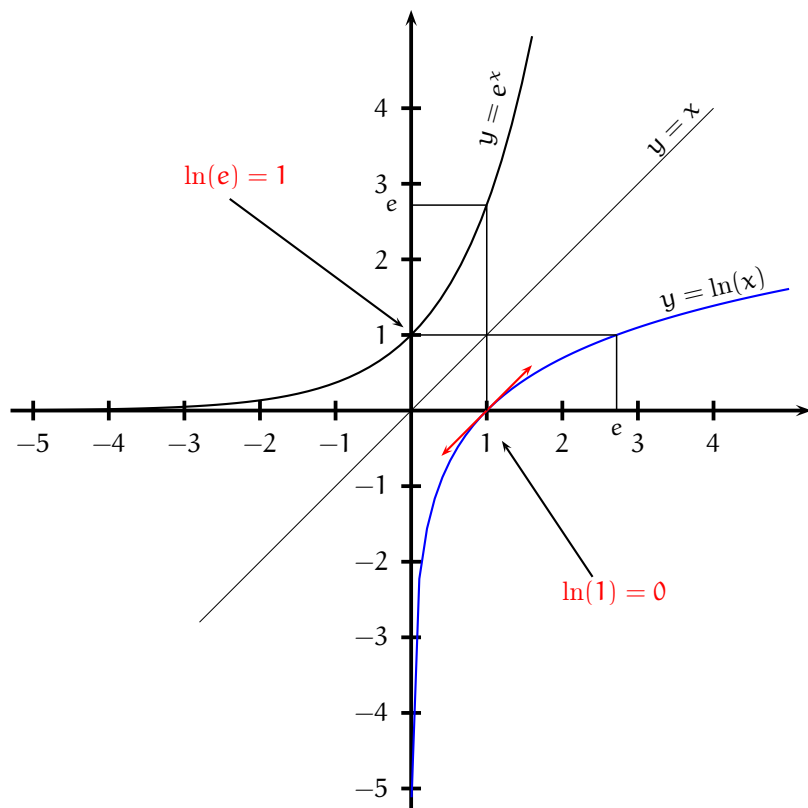
## Définition de la fonction logarithme népérien



La fonction logarithme est l'unique fonction  $f$ , définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et vérifiant  $f(1) = 0$  et pour tout réel  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .

$\ln$  est la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1.

$$\text{Pour tout réel } x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$



## Propriétés analytiques

- La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et

$$\text{Pour tout réel } x > 0, (\ln)'(x) = \frac{1}{x}.$$

- La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .
- Limites aux bornes du domaine :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

- Théorèmes de croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0.$$

pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0.$$

- Nombre dérivé en 1 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

## Propriétés algébriques

Pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ .

Pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \times y)$ .

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ .

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ .

Pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ .

Pour tout réel  $x > 0$  et tout entier relatif  $n$ ,  $\ln(x^n) = n \ln(x)$ .

Pour tout réel  $x > 0$  et tout entier relatif  $n$ ,  $n \ln(x) = \ln(x^n)$ .

## Liens avec la fonction exponentielle

Pour tout réel  $x$ ,  $\ln(e^x) = x$ . Pour tout réel  $x$  strictement positif,  $e^{\ln(x)} = x$ .

## Résolution d'équations et d'inéquations

Pour tout réel  $a$ , l'équation  $\ln(x) = a$  a une solution et une seule.

Pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $(\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y)$ . Pour tout réel  $x > 0$  et tout réel  $a$ ,  $\ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a$ .

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ . Donc

Pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $(\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y)$ . Pour tout réel  $x > 0$  et tout réel  $a$ ,  $\ln(x) < a \Leftrightarrow x < e^a$ .