المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2013
الموضوع

RS25

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعب(ة) أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.
- Le deuxième exercice se rapporte au calcul des probabilités
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

<u>Exercice1</u> :(3,5 points) les parties I et II sont indépendantes

I- Pour tout x et y de l'intervalle $G =]1,2[$ on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0.5 1-Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G

2-On rappelle que $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ vers G définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

0.75 a)Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ dans $(G,*)$

0.5 b)En déduire que $(G,*)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

II-On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et l'unité est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel

et on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0.5 1-a)Vérifier que : $A^3 = O$ et en déduire que A est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$

0.5 b)Vérifier que : $(A^2 - A + I)(A+I) = I$ en déduire que la matrice $A+I$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ que l'on déterminera.

0.75 2-Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = aI + bA$ et l'on considère l'ensemble

$E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

<u>Exercice2</u> :(3points)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

I- On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne . et on considère l a variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

1 1- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.5 2- Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

II-On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

<u>Etape 1</u> :On tire une boule de l'urne ,on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

<u>Etape 2 :</u>On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1

<u>Etape 3 :</u> On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2

On considère les évènements suivants :
N "la boule tirée à l'étape 1 est noire"
R "la boule tirée à l'étape 1 est rouge"
E "toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires "

0.5 1) Montrer que : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$

0.5 2) Calculer $p(E)$

0.5 3) Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est realisé.

Exercice 3 : **(3.5points)**

I- Soit a un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

0.5 1) Montrer que : $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ et $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$ sont les deux solutions de l'équation (E)

2) On prend $a = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0.5 a- Montrer que : $a - 1 = 2\sin\frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

1 b- En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2

II- Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On admet que $\mathrm{Re}(a) < 0$ et on considère les points $A(a)$, $B(-i)$, $C(i)$ et $B'(1)$

0.5 1) Déterminer en fonction de a , les affixes des points J et K milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$

2) Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'

0.5 Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

0.5 3) Calculer $\frac{a'-c'}{a-1}$ et en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$

Exercice 4 **:(8.25 points)**

1-Soit f la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2 x}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

0.5 a) Montrer que f est continue à droite au point 0 ,puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 b)Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0 (On pourra utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln^2 x = 0$)

0.5 c) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $(\forall x > 0)$; $f'(x) = \frac{-x\ln x(1+\ln x)}{(1+x^2\ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

0.5 d)Donner le tableau de variation de la fonction f

2- Soit F la fonction numérique définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

et soit (C_F) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.25 a)Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ sur l'intervalle $[e,+\infty[$

0.5 b)Montrer que : $(\forall t\geq e)\ ;\ t\ln t\leq\sqrt{1+t^2\ln^2 t}\leq\sqrt{2}\ t\ln t$

0.75 c)Montrer que : $(\forall x\geq e)\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln x)\leq\int_e^x\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2 t}}dt\leq\ln(\ln x)$

0.5 d)En déduire que: $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=0$

0.5 e)Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

1 f) Construire (C_F) (on prend $F(1)\approx 0,5$ et $F\left(\dfrac{1}{e}\right)\approx 0,4$)

3- Pour tout x de $[0,+\infty[$ on pose : $\varphi(x)=x-F(x)$

0.75 a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ et étudier les variations de φ

0.5 b)Montrer que pour tout entier naturel n , l'équation $\varphi(x)=n$ admet une seule solution α_n dans l'intervalle $[0,+\infty[$

0.5 c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \alpha_n\geq n$ puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

0.5 4-a),Montrer que : $(\forall n\geq 1)\ ;\ 0\leq\dfrac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}\leq\dfrac{F(n)}{n}+f(n)$ (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0.5 b)Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$

Exercice5 : (1.75 points)

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $u_n=\left(\dfrac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n=\ln(u_n)$

0.25 1-Vérifier que : $(\forall n\geq 1)\ ;\ v_n=n^2\left(\ln(\arctan(n))-\ln(\arctan(n+1))\right)$

2-En utilisant le théorème des accroissements finies , montrer que :

0.5 $(\forall n\geq 1)\ (\exists c\in]n,n+1[)\ ;\ v_n=\dfrac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

0.5 3-Montrer que : $(\forall n\geq 1)\ ;\ \dfrac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)}<v_n<\dfrac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

0.5 4-Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

FIN