

EXERCICE 1

On considère dans \mathbb{C} l'équation $(E) Z^2 + (6 + 5i)Z + 2 + 16i = 0$

1) a) déterminer les racines carrées du nombre $3 - 4i$

b) déduire les solutions de (E)

2) le plan (P) est muni d'un $\mathcal{R.O.N}^\circ\mathcal{D} (o, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points B, A et C d'affixes respectifs $b = -4 - 2i$; $a = i$

et $c = -2 - 3i$

a) montrer que ABC est isocèle en C

b) soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ on pose $D = R(A)$ et $R(E) = C$

(i) montrer que l'affixe de E est $Z_E = -5 - 4i$ puis déterminer l'affixe du point D

(ii) soit I le milieu de $[AC]$ montrer que $\frac{d - Z_E}{Z_I - b} = 2i$

En déduire que $(DE) \perp (IB)$ et $DE = 2BI$

EXERCICE 2

On définit sur \mathbb{R} la loi T par : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) xTy = a - (a - x)(a - y)$

1) a) montrer que T est commutative ; associative

b) déterminer l'élément neutre de T

c) montrer que $(\mathbb{R} - \{a\}, T)$ est un groupe commutatif

2) montrer que $(]-\infty, a[, T)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R} - \{a\}, T)$

3) soit f l'application définie par : $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a - x$

a) montrer que f est un isomorphisme de (\mathbb{R}, \times) vers (\mathbb{R}, T)

b) soit x de \mathbb{R} et $n \geq 2$ déterminer en fonction de x et n le nombre $\underbrace{xTxT \dots Tx}_{n \text{ fois } x}$

EXERCICE 3

(I) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) a) calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$

2) calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f puis donner le tableau de variations

3) prouver que (1) $(\forall t > 0) \quad 2e^t - t - t^2 > 0$

$$\text{et (2) } (\forall t > 0) \quad 1+t > \sqrt{1+t^2}$$

4) en déduire que $(\forall x \geq 0) \quad f(x) > x$

5) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

b) étudier la monotonie de $(U_n)_n$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(II) soit G la fonction définie sur \mathbb{R} par : $G(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$

1) montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $G'(x)$

2) montrer que G est impaire

3) a) montrer que $(\forall x > 0) \quad G(x) \geq \frac{2(e^x - e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}$

b) déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$

4) dresser le tableau de variations de G