I. Transformations dans le plan :

a. Définition :

Toute relation qui associe à tout point M du plan (P) au point M' de (P) tel que M' vérifie une ou plusieurs conditions on l'appelle transformation du plan (P) , on la note t ou h et $S_{(D)}$ ou S_O ou r ....

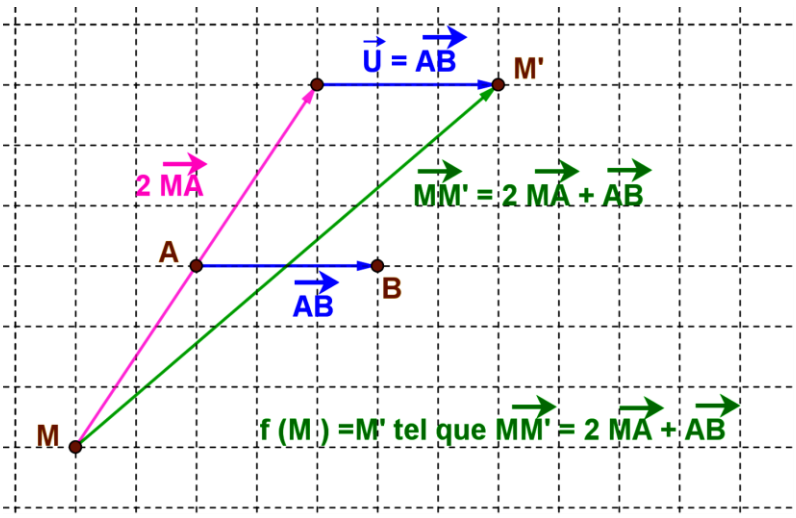
On écrit $t(M)=M'$ (pour t) ou $h(M)=M'$ (pour h) ou $S_{(D)}(M)=M'$ (pour $S_{(D)}$) ....

- On écrit : $\begin{array}{l} t\ :(P)\to(P) \\ \quad M\mapsto t(M)=M' \end{array}$
- On dit que t transforme le point M au point M' ou encore le point M' est le transformé de M par la transformation t . au lieu d'écrire $h(M)=M'$ on écrit $t : M\mapsto M'$.
- On dit que le point M a pour image M' par la transformation t , ou encore le point M' est l'image du point M .

b. Exemple :

Soient A et B deux points donnés (c.à.d. fixes du plan (P)) .

Soit la transformation f du plan (P) définie par $f(M)=M'$ tel que $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}$.



c'est la meme chose pour les autres points M du plan (P)

II. Transformation nommée symétrie axiale :

a. Activité :

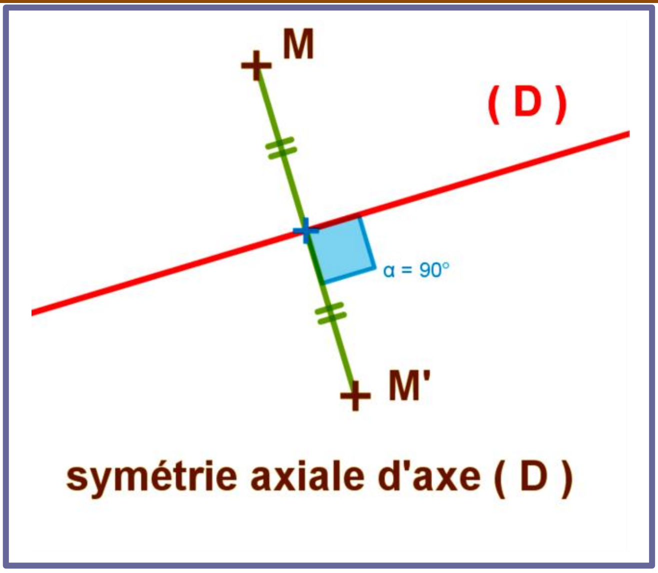
Soit (D) une droite donnée du plan (P) et M un point de (P) .

1. Comment on construit le point M' le symétrique de M par rapport à la symétrie axiale d'axe (D) .

b. Définition :

La symétrie axiale S_D de droite (D) du plan (P) est la transformation qui transforme tout point M de (P) au point M' tel que la droite (D) soit la médiatrice du segment $[MM']$. On écrit $S_D(M)=M'$.

c. Exemple :



III. Transformation nommée symétrie centrale :

a. Activité :

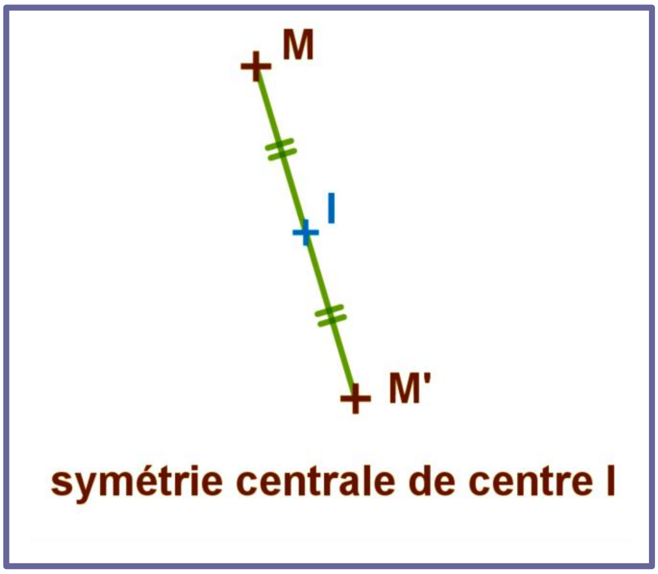
Soit I un point donné du plan (P) et M un point de (P) .

1. Comment on construit le point M' le symétrique de M par rapport à la symétrie centrale de centre I .

b. Définition :

La symétrie centrale S_I de centre le point I du plan (P) est la transformation qui transforme tout point M de (P) au point M' tel que le point I soit le milieu du segment $[MM']$. On écrit $S_I(M) = M'$.

c. Exemple :



d. Remarque :

- $S_I(M) = M'$ est équivaut à le point I soit le milieu du segment $[MM']$.
- $S_I(M) = M'$ est équivaut à $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.
- $S_I(M) = M'$ est équivaut à $S_I(M') = M$.
- I est le seul point invariant par la symétrie centrale S_I d'où $S_I(I) = I$.

IV. Transformation nommée translation :

a. Activité :

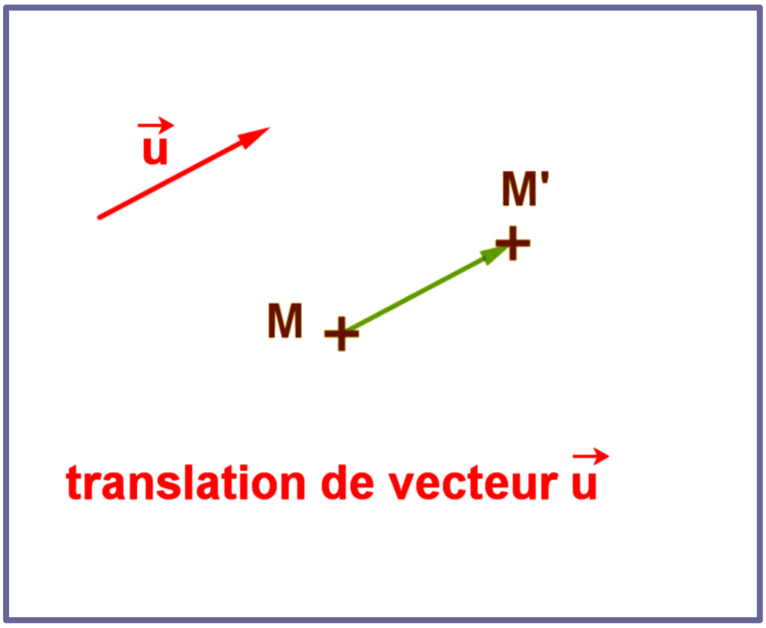
Soit $\vec{u}$ un vecteur donné du plan (P) et M un point de (P) .

1. Construit le point M' le symétrique de M tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
2. Donner la nature de cette transformation .

b. Définition :

La translation du vecteur $\vec{u}$ du plan (P) est la transformation qui transforme tout point M de (P) au point M' tel que le point $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, on note la translation par $t_{\vec{u}}$. On écrit $t_{\vec{u}}(M) = M'$

c. Exemple :



d. Remarque :

- $t_{\vec{u}}(M) = M'$ est équivaut à le quadrilatère $ABM'M$ est parallélogramme (avec $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$)
- $t_{\vec{u}}(M) = M'$ est équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- $t_{\vec{u}}(M) = M'$ est équivaut à $t_{-\vec{u}}(M') = M'$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ aucun point de (P) est invariant .
- Tous les points du plan sont invariant par la translation de vecteur nul $(\vec{u} = \vec{0})$. $t_{\vec{u}}(M) = M$

V. Transformation nommée homothétie:

a. Activité :

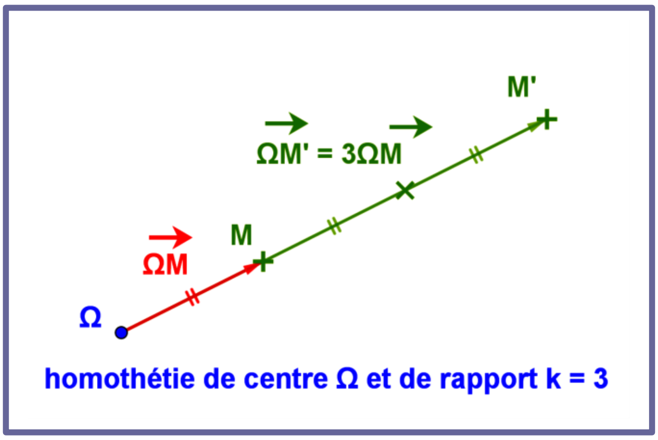
Soit Ω un point donné du plan (P) et k un nombre réel non nul et M un point de (P) .

1. Construit le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\overrightarrow{\Omega M}$.
2. Donner la nature de cette transformation .

b. Définition :

L'homothétie de centre un point Ω donné du plan (P) et de rapport k est la transformation qui transforme tout point M de (P) au point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, on note L'homothétie par $h(\Omega,k)$. On écrit $h(M) = M'$

c. Exemple :



d. Remarque :

- $h(M) = M'$ ona M et M' et Ω sont alignés .
-
- Si $k = 0$ on a $h(M) = \Omega$ tous les points ont pour image Ω . (l'homothétie n'est pas intéressante)
- Si $k = 1$ on a $h(M) = M$ tous les points sont invariant (chaque point reste à sa place) . . (l'homothétie n'est pas intéressante)
- Pour cela on prend $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$
- Si $k = -1$ on a $h(M) = M'$ avec Ω est le milieu de $[MM']$ l'homothétie h est la symétrie centrale S_Ω de centre Ω ou encore $dh(\Omega,-1) = S_\Omega$.
- Si $k > 0$ on a $h(M) = M'$ avec $M' \in [\Omega M)$ (demi droite $[\Omega M)$) .
- Si $k < 0$ on a $h(M) = M'$ avec M' appartienne à la demi droite opposée à $[\Omega M)$).

VI. Propriété caractéristique de $t_{\vec{u}}$ et S_Ω et $h(\Omega,k)$:

a. Propriété :

Soit f une transformation dans le plan (P) tel que pour tous points A et B de (P) on a $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

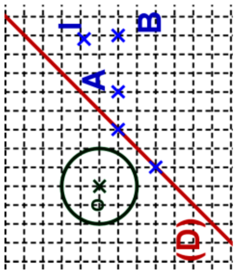
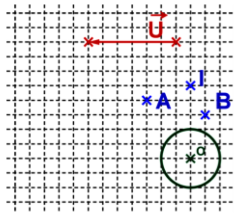
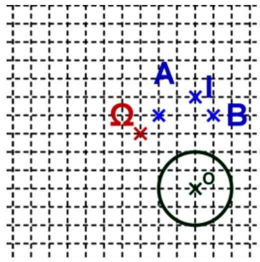
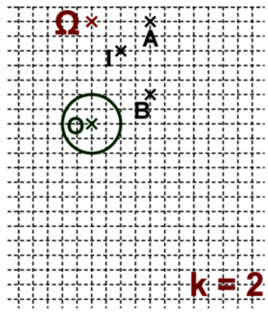
☺ La transformation f est une translation si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

☺ La transformation f est une homothétie si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

☺ La transformation f est une symétrie centrale si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

VII. Les images de certains figures géométriques par les transformations $t_{\vec{u}}$ et S_{Ω} et $h(\Omega,k)$ et S_D :

a. Activité :

transformation $f \rightarrow$	S_D	$t_{\vec{u}}$	S_{Ω}	$h_{(\Omega\ ,\ k=2)}$
Figures $\rightarrow$ Construire les images des figures $\downarrow$				
	Images par S_D $\downarrow$	Images par $t_{\vec{u}}$ $\downarrow$	Images par S_{Ω} $\downarrow$	Images par $h_{(\Omega\ ,\ k=2)}$ $\downarrow$
La droite (AB)				
Le segment $[AB]$				
Le cercle $C(O,2)$				
Angle géométrique $[AIB]$				
Le vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$				
transformation $f \rightarrow$ conserve (oui ou non) $\downarrow$	S_D	$t_{\vec{u}}$	S_{Ω}	$h_{(\Omega\ ,\ k=2)}$
Les distances				
Le milieu				
Coefficient de colinéarité				
parallélisme				
orthogonalité				
Mesures des angles géométriques				
Intersection des figures				

b. Propriétés :

Soient A et B deux points du plan (P) et A' et B' leurs images par l'une des transformations suivantes : symétrie axiale S_D ou symétrie centrale S_Ω ou translation $t_{\vec{u}}$ ou homothétie $h(\Omega,k)$.

1. L'mage de la droite (AB) par les transformations précédentes est la droite $(A'B')$ et $(AB)//(A'B')$.
2. L'mage du segment $[AB]$ par les transformations précédentes est le segment $[A'B']$ et $A'B'=AB$. sauf l'homothétie on a $A'B'=kAB$.
3. L'mage du vecteur $\alpha\overrightarrow{AB}$ par les transformations précédentes est le vecteur $\alpha\overrightarrow{A'B'}$. sauf l'homothétie on a $k\alpha\overrightarrow{A'B'}$.
4. L'mage du cercle $\mathcal{C}(A,r)$ par les transformations précédentes est le cercle $\mathcal{C}'(A',r)$ et $A'B'=AB$. sauf l'homothétie est le cercle $\mathcal{C}''(A',|k|\times r)$.
5. L'mage de l'angle géométrique AOB par les transformations précédentes est l'angle géométrique $A'O'B'$ de mêmes mesure .
6. les transformations précédentes conservent les distance (sauf l'homothétie) , et le milieu , et les mesures des angles géométriques , et le coefficient de colinéarité , et le parallélisme , et l'orthogonalité , et l'intersection des figures .

c. remarque :

Image d'une droite (Δ) par une : symétrie axiale S_D est une droite (Δ') tel que :

- Si $(\Delta)//(D)$ alors $(\Delta')//(\Delta)//(D)$.
- Si $(\Delta)\perp(D)$ alors $(\Delta')=(\Delta)$.

Image d'une droite (Δ) par une : symétrie centrale S_Ω est une droite (Δ') tel que :

- Si $\Omega\notin(\Delta)$ alors $(\Delta')//(\Delta)$.
- Si $\Omega\in(\Delta)$ alors $(\Delta')=(\Delta)$.