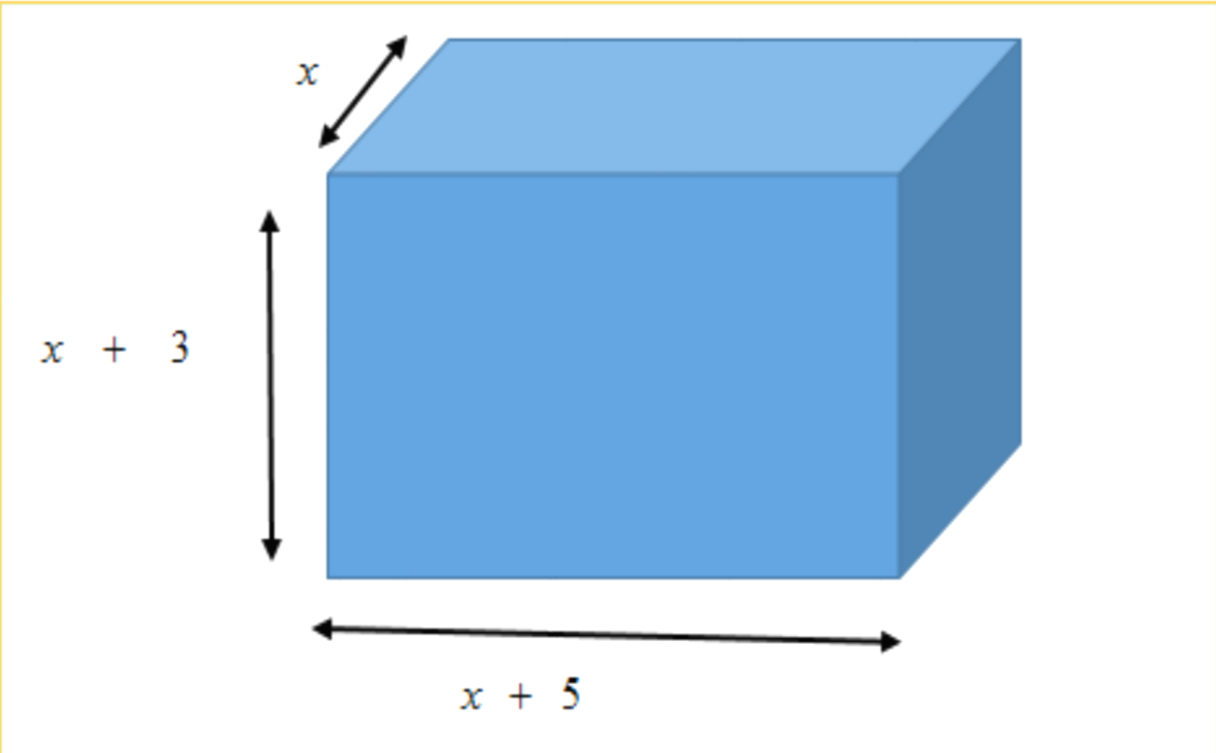
Ch. 5 : Les polynômes

I. Activité 1

Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions x ,$x+3$ et $x+5$ avec x réel strictement positif. Soit $\mathrm{V}(x)$ le volume de ce parallélépipède

1) **Montrer que** $\mathrm{V}(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$
2) **Calculer** $\mathrm{V}(1)$ **et** (2) **.**
3) **Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer** $\mathrm{V}(1)$ **et** $\mathrm{V}(2)$ **?**



II. Vocabulaire

L'exemple $\mathrm{V}(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée fonction polynôme par abus de langage dirons brièvement polynôme de degré 3 on note $d°(V) = 3$.

Les réels 1, 8, 15 , 0 sont appelés coefficients du polynôme $\mathrm{V}(x)$.

III. Définition d'un polynôme

a. **Définition: On appelle polynôme de degré n , et on le nomme P(x) une expression littérale en x de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.**
avec $a_n \neq 0$, a_n , a_{n-1} , …. a_2 , a_1 , a_0 sont appelés coefficients du polynôme et a_0 est appelé terme constant .

b. **Exemple : soit $P(x) = -5x^4 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$**

P(x) est un polynôme de degré 4 on écrit d°(P) =4

Les réels –5 ,0 ,$\sqrt{3}$, 4 , –7 sont les coefficients de P(x) car on peut écrire

$P(x) = -5x^4 + 0x^3 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$

c.Application1

On considère les expressions littérales suivantes $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} - 1$,
$g(x) = -x^5 + 3x^3 + x + 6$, $h(x) = \sqrt{13 - x^2} - 2x$

1) **Calculer $f(2)$, $g(2)$,$h(2)$**
2) **Reconnaitre parmi les expressions celles qui représentent un polynôme en précisant son degré et ses coefficients**

d. **Application2 :**

Ecrire le polynôme p(x) dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1,0,0,-3,1

Vocabulaire :

- **un polynôme de 2eme degré écrit en général $P(x) = ax^2 + bx + c$; avec $a \neq 0$**
  On le nomme trinôme : ex : $P(x) = -3x^2 - 6x + 2$

- **un polynôme de 1er degré écrit en général P(x)= $ax + b$; avec $a \neq 0$**

ex : $g(x) = -7x + 1$
ex : $P(x) = 0$ s'appelle polynôme nul

IV. Egalité de deux polynômes

Simulation : Cas du polynôme nul

$P(x) = 0$ on peut s'écrire $0x + 0 = 0$; $0x^2 + 0x + 0 = 0$ …. $0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x$
$0 = 0$

a. Activité :

Soient f *et* g deux polynômes définies par $f(x) = 3x^2 - x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$

1) Vérifier que $f(1) = g(1)$ et $f(4) = g(4)$

La phrase «$f(x) = g(x)$, pour tout réel x » est-elle vraie ?

2) Déterminer les réels a_2 , a_1 , a_0 tels que pour tout réel x

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = -10x + 2x^2 + 11$$

3) Déterminer les réels a_3,a_2 , a_1 , a_0 tels que pour tout réel x

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = -x - 5x^3 + 2x^2 + 2$$

Soit $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

Et $Q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$

Sachant que pour tout réel, $P(x) = Q(x)$ que peut dire de a_n et b_n ; a_{n-1}et b_{n-1} ; ... ; a_0 et b_0

Exercice résolu:

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes définies par $P(x) = ax^3 + (b-2)x^2 + (4-c)x + d$ avec *a ,b, c et d sont des réels , et* $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$

Déterminons a , b , c et d sachant que $P(x) = Q(x)$ *pour tout réel* x

Réponse :

on a $P(x) = Q(x)$ équivaut à $a = -3, -2 = 1$, $4 - c = 0$,$d = 7$ équivaut à $a = -3$, $b = 3, c = 4$, $d = 7$

Exercie1 :

Considérons les polynômes $U(x)$ et $V(x)$ tels que

$$U(x) = -3 + \sqrt{32}x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 - \frac{2}{3}x^6 + a_8x^8$$

et $V(x) = b_0 + b_1x + 4\sqrt{2}x^2 + b_4x^4 - \frac{14}{21}x^6 + b_7x^7$

Pouvons -nous avoir $U(x) = V(x)$?

V. Opérations sur les polynômes

a. Somme et produit de deux polynômes

La somme de deux polynômes P et Q est aussi un polynôme noté P+Q

$$d°(P+Q) \leq \sup(d°(P); d°(Q))$$

La différence de deux polynômes P et Q est un polynôme noté P-Q

$$d°(P-Q) \leq \sup(d°(P); d°(Q))$$

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté P×Q

$$d°(P \times Q) = d°(P) + d°(Q)$$

b. Application:

Calculer (P+Q) (x), (P-Q) (x) et (P×Q) (x) avec :

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x+1$ *et* $Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x-3$

c. Remarque :

- *Le polynôme nul est le polynôme dont tous ses coefficients sont nuls.*
- *Le polynôme nul n'admet pas de degré réel.*

VI. Racine d'un polynôme-factorisation d'un polynôme

A. Racine d'un polynôme :

Activité3 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x - 2$

1) **Calculer $P(1)$**
2) **Déterminer les réels a et b tels que $P(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$**

On a Dans l'activité $P(1) = 0$, On dit que 1 une racine de $P(x)$ ou zéro de $P(x)$

Définition : On dit qu'un réel $\propto$ est une racine ou un zéro d'un polynôme P si

$$P(\propto) = 0$$

Application : Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

a) **Vérifier que 2 et 3 sont deux racines de $P(x)$**

b) **Soit $R(x)$ un polynôme tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-2)(x+3) + R(x)$**
   1) **Quel est la nature de $R(x)$**
   2) **Déterminer $R(x)$**

B. Factorisation d'un polynôme.

Activité : Soit ∝ un réel

1) **Prouver que si un polynôme est factorisa blé par $x - \propto$ alors ∝ est une racine de ce polynôme**
2) **Soit ∝ un réel et P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$**
   a. **Factoriser $P(x) - Q(x)$**
   b. **En déduire que si ∝ est une racine du polynôme alors il existe un polynôme Q dont on précisera le degré tel que pour tout réel , $P(x) = (x - \propto)Q(x)$.**

La loi du reste

Définition:	*Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par un binôme de la forme $(x-a)$ est la valeur numérique de ce polynôme pour $x = a$.* *On a donc : $r = P(a)$*

Résultat:	*Un polynôme $P(x)$ est divisible par un binôme de la forme $(x-a)$ si le reste de la division de $P(x)$ par $(x-a)$ est nul, c'est-à-dire si la valeur numérique de $P(x)$ pour $x = a$ est nulle ou $P(a) = 0$*

Exercices résolu : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

1) **Montrons que P(x) est divisible par $x + 3$**

Calculons $P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 5(-3) - 6 = 0$

Et comme P(-3) =0 donc $P(x)$ est divisible par $x + 3$

A toi :

2) **Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x + 1$ et $x - 2$**
3) **Vérifier que $P(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$**

On dit que $P(x)$ est écrite sous forme de produit de binômes

pratiques de factorisation d'un polynôme.

1) Division euclidienne

On reprend l'exemple (exercice résolu précédent)

On a $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ est divisible par $x + 3$

Cherchons le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x+3)Q(x)$

Le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 2$

D'où $P(x) = (x+3)(x^2 - x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-5x-6 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & x^2-x-2 \\ \cline{1-1} -x^2-5x-6 & \\ x^2+3x & \\ \cline{1-1} -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

On peut vérifier que $Q(2) = 0$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x - 2$

Factorisons $Q(x)$

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+1 \\ \cline{1-1} 0+x+2 & \\ -x-2 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

D'où la factorisation de $P(x)$ en produit de binômes $P(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$

Exercice : **soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$**

1) **Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x - 3$**
2) **En utilise le division euclidienne déterminer $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-3)Q(x)$**
3)
   a. **Montrer que -1 est une racine de $Q(x)$**
   b. **Factoriser $Q(x)$**
   c. **En déduire une factorisation de $P(x)$ en produit de binômes**

2) Schéma de Horner

Un exemple

Soit la fonction polynôme P définie par $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$.
On souhaite calculer $P(a)$ pour $a = 5$.

En pratique, on peut présenter le calcul précédent de $P(a)$ à l'aide du tableau suivant :

	2	-7	4	-1
$a = 5$		10	15	95
	2	3	19	94

$$\begin{aligned} P(a) &= 2a^3 - 7a^2 + 4a - 1 \\ &= ((2a - 7)a + 4)a - 1 \end{aligned}$$

construit selon la méthode décrite ci-dessous :

	2	-7	4	-1
$a = 5$		$\times a$ 10 $+$	15	95
	2	3	19	94

La dernière ligne du tableau précédent ne nous livre pas seulement la valeur de $P(a)$.
En effet, si construit en utilisant les trois premiers cœfficients de cette ligne, le polynôme Q de degré 2 de la manière suivante :

2	3	19	94

$$Q(x) = 2x^2 + 3x + 19$$

on remarque que :

$Q(x)\,(x - a) = (2x^2 + 3x + 19)(x - 5) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 95 = (2x^3 - 7x^2 + 4x - 1) - 94 = P(x) - P(a)$.

On admet que ce résultat se généralise à un polynôme P de dégré quelconque.
Dans le cas particulier où a est une racine de P (c.a.d. $P(a) = 0$), le tableau de Hörner nous donne la factorisation de $P(x)$ par $(x - a)$.