

Exercice 1 : (correction)

$$\begin{aligned}
 A &= 3\sqrt{112} - 2\sqrt{7} + 5\sqrt{28} \\
 &= 3\sqrt{4^2 \times 7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{2^2 \times 7} \\
 &= 12\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 10\sqrt{7} \\
 &= (12 - 2 + 10)\sqrt{7} \\
 &= 20\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= 2\sqrt{32} - 3\sqrt{18} - 3\sqrt{50} \\
 &= 2\sqrt{4^2 \times 2} - 3\sqrt{3^2 \times 2} - 3\sqrt{5^2 \times 2} \\
 &= 8\sqrt{2} - 9\sqrt{2} - 15\sqrt{2} \\
 &= (8 - 9 - 15)\sqrt{2} \\
 &= -16\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 : (correction)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3\sqrt{360} - 2\sqrt{180}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{3\sqrt{6^2 \times 10} - 2\sqrt{6^2 \times 5}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{18\sqrt{10} - 12\sqrt{5}}{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \\
 &= \frac{(18\sqrt{10} - 12\sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})}{10 - 2} \\
 &= \frac{180 + 36\sqrt{5} - 60\sqrt{2} - 12\sqrt{10}}{8} \\
 &= \frac{1}{2}(45 + 9\sqrt{5} - 15\sqrt{2} - 3\sqrt{10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2}{\sqrt{33}} \times \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{2} - 1} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{33}} \times \frac{\sqrt{33 \times 11}}{\sqrt{2} - 1} \\
 &= \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2} - 1} \\
 &= \frac{2\sqrt{11}(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} \\
 &= 2\sqrt{11}(\sqrt{2} + 1)
 \end{aligned}$$

Exercice 3 : (correction)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{10 - 3\sqrt{11}} + \frac{1}{10 + 3\sqrt{11}}}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10 + 3\sqrt{11}}{100 - 99} + \frac{10 - 3\sqrt{11}}{100 - 99}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{10 + 3\sqrt{11} + 10 - 3\sqrt{11}}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20}
 \end{aligned}$$

Donc A est un irrationnel car $\sqrt{20}$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 4: (correction)

1. Vrai, puisque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. Vrai, il peut l'être. $\frac{-6}{2}$ est un rationnel ($-3 = \frac{-6}{2}$) et il est entier.
3. Faux, il peut l'être. $\frac{5}{2}$ est un rationnel ($2,5 = \frac{5}{2}$) et il est un décimal.
4. Vrai, puisque $\mathbb{ID} \subset \mathbb{Q}$.
5. Vrai, $\frac{1}{2}$ est un rationnel ($\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$) et 2 est un entier naturel.
6. Vrai, 2,0 est un décimal ($-2,0 = -2$) et -2 est un entier relatif.

Exercice 5: (correction)

$$\begin{aligned} A &= 4x^2 - 9 + 2(3 - 2x) \\ &= (2x)^2 - 3^2 + 2(3 - 2x) \\ &= (2x - 3)(2x + 3) - 2(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(2x + 3 - 2) \\ &= (2x - 3)(2x + 1) \\ B &= x^3 - 8 + 4(x^2 - 4) - 3(x - 2) \\ &= x^3 - 2^3 + 4(x^2 - 2^2) - 3(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 2^2) + 4(x - 2)(x + 2) - 3(x - 2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 4(x + 2) - 3) \\ &= (x - 2)(x^2 + 6x + 9) \\ &= (x - 2)(x + 3)^2 \\ C &= 8x^3 + 1 - 2(1 - 4x^2) \\ &= (2x)^3 + 1^3 - 2(1^2 - (2x)^2) \\ &= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) - 2(1 - 2x)(1 + 2x) \\ &= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1 - 2(1 - 2x)) \\ &= (2x + 1)(4x^2 + 2x - 1) \\ D &= x^5 + x^3 - x^2 - 1 \\ &= x^3(x^2 + 1) - (x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x^2 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Exercice 6: (correction)

On sait que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ donc

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$= (\sqrt{5})^2 - 2 \times \frac{4}{5}$$

$$= 5 - \frac{8}{5}$$

$$= \frac{17}{5}$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$= (\sqrt{5})\left(\frac{17}{5} + \frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{21\sqrt{5}}{5}$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$$

$$= \left(\frac{17}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{289 - 32}{25}$$

$$= \frac{257}{25}$$