

PRODUIT SCALAIRE

Présentation globale

I) Le produit scalaire de deux vecteurs

II. Produit scalaire et norme

III. Produit scalaire et orthogonalité

IV) APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

I) Le produit scalaire de deux vecteurs

1) Définitions

Définition1 : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Et soient A ; B et C trois points du plan tel que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

On appelle produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel définit par :

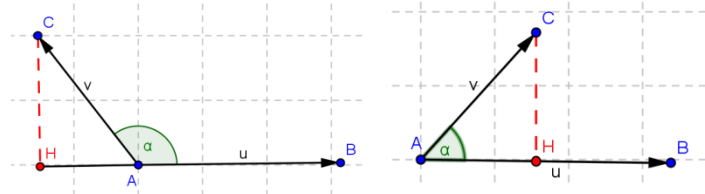
$$\text{Si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \quad \text{c a d}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont le même sens}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont un sens contraire}$$



Remarque :

soient A ; B ; C et D quatre points du plan
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{C'D'}$ avec : A' ; B' les projections orthogonales respectifs de A ; B sur la droite (CD) .

Et C' ; D' les projections orthogonales respectifs de C et D sur la droite (AB)

Application : Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et direct et $AB = 2cm$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$

Réponse :

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA}$ car :

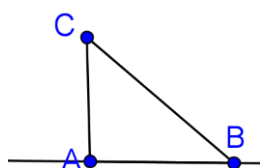
A est le projeté orthogonales de A sur (AB) et B est le projeté

orthogonales de B sur (AB)

et A est le projeté orthogonales de C sur (AB)

$$\text{donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} \times \vec{0} = 0$$

$$\text{de même On a } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BA} = 2 \times 2 = 4$$



de même On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AB} = -2 \times 2 = -4$

Définition2: Soit un vecteur \vec{u} et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La norme du vecteur \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$ c'est la distance AB.

Définition3 : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel définit par :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est nul

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$, dans le cas contraire.

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " \vec{u} scalaire \vec{v} ".

Remarque : Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux représentants des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$$

Exemple : Soit un triangle équilatéral ABC de côté a .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$$

$$= a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) propriétés :

Propriété1 : Pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Démonstration :

On suppose que \vec{u} et \vec{v} sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}; \vec{u}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{v}; \vec{u}))$$

$$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}; \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Propriété2 : Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$1) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad 2) \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Avec k un nombre réel.

- Admis -

Propriété 3 : Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a :

$$1) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad 2) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$3) (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Démonstration : pour le 2) :

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \end{aligned}$$

II. Produit scalaire et norme

Soit un vecteur \vec{u} , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$$

$$\text{Et } \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 \text{ on a ainsi : } \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Propriété 1 : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Démonstration : de la première formule :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Propriété 2 : Soit A, B et C trois points du plan.

$$\text{On a : } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

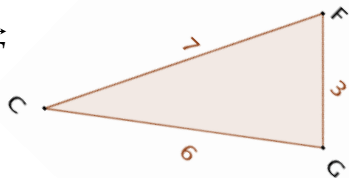
Démonstration :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - \|\vec{CB}\|^2) = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Exemple :) Soit CFG un triangle tel que $CF = 7$ et $CG = 6$ et $FG = 3$

Calculer : $\vec{CG} \cdot \vec{CF}$



Solution :

$$\vec{CG} \cdot \vec{CF} = \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - GF^2) = \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) = 38$$

III. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration : Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

\Leftrightarrow Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux

Application : 1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et $AC = 5$ et $BC = 6$

a) Calculer $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$ et en déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Calculer AH

2) sachant que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$

a) Calculer : $A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$ et $B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 \text{ et } D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2$$

b) en déduire $E = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ et $F = \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

Réponse : 1) Calcule de $\vec{BA} \cdot \vec{AC}$

$$\text{On a } \vec{BA} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (\|\vec{BA} + \vec{AC}\|^2 - \|\vec{BA}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2)$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (\|\vec{BC}\|^2 - \|\vec{BA}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (BC^2 - AB^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (6^2 - 7^2 - 5^2) = -19$$

donc : $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = -19$

donc : On a $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -\vec{BA} \cdot \vec{AC} = 19$

a) Calcule de AH

$$\text{On a } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH \text{ donc : } AH = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB} = \frac{19}{7}$$

$$2) a) A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = 2\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v}^2 = 2 \cdot \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 2 \times 4^2 + \frac{1}{2} - 6 \times 2^2$$

$$A = 32 + \frac{1}{2} - 24 = \frac{15}{2}$$

$$B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right) = \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{1}{4} \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$B = \frac{1}{2} \times \|\vec{u}\|^2 - \frac{3}{4} \times \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \times \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \times 2^2$$

$$B = 8 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{51}{8}$$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2^2$$

$$C = 16 + 1 + 4 = 21$$

$$D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$$

$$D = 4 \times 4^2 + 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \times 2^2 = 64 - 6 + 36 = 94$$

b) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 21$ donc $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 94$ donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{21}$

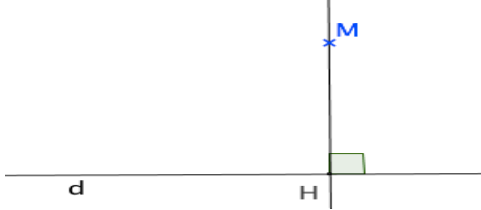
$$(2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 94 \quad \text{donc} \quad \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = 94 \quad \text{donc}$$

$$\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \sqrt{94}$$

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite d et un point M du plan.

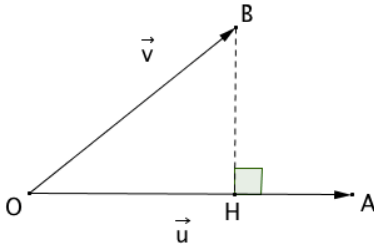
Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$$



Démonstration :

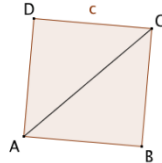
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\vec{OH} + \vec{HB}) = \vec{OA} \cdot \vec{OH} + \vec{OA} \cdot \vec{HB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$$

En effet, les vecteurs \vec{OA} et \vec{HB} sont orthogonaux donc

$$\vec{OA} \cdot \vec{HB} = 0.$$

Exemple : Soit un carré ABCD de côté c .

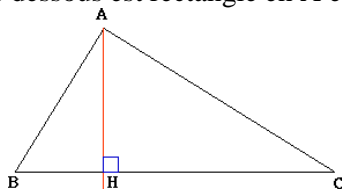
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = \|\vec{AB}\|^2 = c^2$$



IV). APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1) LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et $[AH]$ la hauteur.



Théorème : Théorème de Pythagore

si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (i.e. le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des 2 autres côtés)

Démonstration :

$$BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{BA} + \vec{AC})^2 = \vec{BA}^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2$$

ABC est rectangle en A donc $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\text{Donc } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

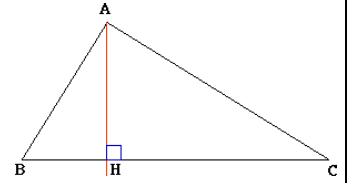
AUTRE RESULTATS :

$$BA^2 = BH \times BC \quad \text{ET} \quad CA^2 = CH \times BC \quad \text{ET}$$

$$AH^2 = HB \times HC \quad \text{ET} \quad AB \times AC = AH \times BC$$

Application : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

$$\text{et } AH = 2\text{cm} \quad \text{et} \quad \angle ABC = \frac{\pi}{3}$$



Calculer AB et BH et BC

Réponse :

a) On a ABH un triangle rectangle en H

$$\text{donc : } \sin(\angle ABC) = \frac{AH}{AB}$$

$$\text{Donc : } AB = \frac{AH}{\sin(\angle ABC)} = \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

b) On a $AB^2 = AH^2 + HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

$$\text{Donc : } AB^2 - AH^2 = HB^2 \quad \text{Donc : } \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2^2 = HB^2$$

$$\text{Donc : } \frac{16}{3} - 2^2 = HB^2 \quad \text{Donc : } HB^2 = \frac{4}{3}$$

$$HB = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

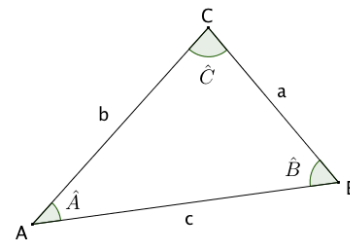
c) On a $BA^2 = BH \times BC$ Donc : $BC = \frac{BA^2}{BH}$

$$\text{Donc : } BC = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

2) Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a avec les notations

de la figure : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$



Démonstration : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos A$

$$\text{et } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$\text{donc : } \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = AB \times AC \times \cos A$$

$$\text{soit : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

Remarque : si ABC un triangle quelconque on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\angle \vec{AB}; \vec{AC})$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos(\angle \vec{CA}; \vec{CB})$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos(\overline{BA}; \overline{BC})$$

Application : Soit ABC un triangle tel que et $AB = 5$ et $AC = 8$ et $A = \frac{2\pi}{3}$ Calculer BC et $\cos C$

Réponse :

a) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos \frac{2\pi}{3} \text{ donc}$$

$$BC^2 = 25 + 64 + 40 = 129 \text{ donc } BC = \sqrt{129}$$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA \times CB \cos C \text{ donc}$$

$$2CA \times CB \cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$$

$$\text{donc } \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2CA \times CB} \text{ donc}$$

$$\cos C = \frac{64 + 129 - 25}{2 \times 8 \times \sqrt{129}} = \frac{168}{16\sqrt{129}} = \frac{21\sqrt{129}}{258}$$

Exercice : Soit EFG un triangle tel que et $EF = 7$

et $EG = 5$ et $FEG = \frac{\pi}{4}$

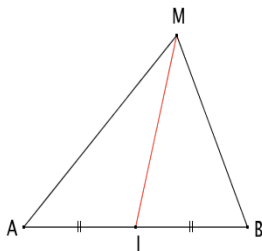
Calculer FG et $\cos EGF$

3) Théorème de la médiane

Propriété : Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$



Démonstration :

$$MA^2 + MB^2 = \|\overline{MA}\|^2 + \|\overline{MB}\|^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$$

$$= (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2$$

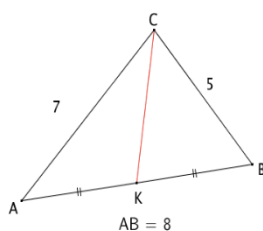
$$= \overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IA} + \overline{IA}^2 + \overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \overline{IB} + \overline{IB}^2$$

$$= 2\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot (\overline{IA} + \overline{IB}) + \overline{IA}^2 + \overline{IB}^2$$

$$= 2\overline{MI}^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0} + \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AB}\right)^2$$

$$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

Exemple : Soit ABC un triangle tel que : $BC = 5$; $AC = 7$ Et $AB = 8$ et K le milieu du segment [AB]. On souhaite calculer CK . D'après le théorème de la médiane, on a :



$$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \frac{AB^2}{2}, \text{ donc :}$$

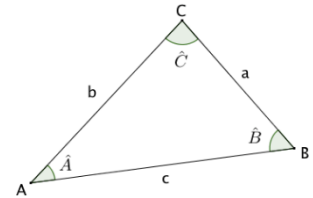
$$CK^2 = \frac{1}{2} \left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(7^2 + 5^2 - \frac{8^2}{2} \right) = 21$$

$$\text{Donc : } CK = \sqrt{21}.$$

4) Surface d'un triangle et formule de sinus

Propriétés :

Dans un triangle ABC



On a :

$$1) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A \text{ avec } S \text{ Surface}$$

du triangle ABC

$$2) \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc} \text{ (formule de sinus)}$$

Application1: Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que

et $EF = 3$ et $EH = 5$ et $FEH = \frac{3\pi}{4}$

Calculer la Surface du triangle EFH et la Surface du parallélogramme $EFGH$

Réponse : a)

$$S_{EFH} = \frac{1}{2} EF \times EH \sin E = \frac{1}{2} 3 \times 5 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{15}{2} \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$S_{EFH} = \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{4} \sqrt{2}$$

$$b) S_{EFGH} = 2 \times S_{EFH} = 2 \times \frac{15}{4} \sqrt{2} = \frac{15}{2} \sqrt{2}$$

Application2: Soit ABC

un triangle tel que :

$a = BC = 6$ et $A = 30^\circ$ et

$B = 73^\circ$

Calculer b et c

Réponse

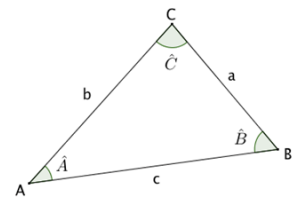
D'après la formule de sinus on a :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{6} = \frac{1}{12} \text{ donc } \frac{\sin 73^\circ}{b} = \frac{1}{12} \text{ donc}$$

$$b = 12 \sin 73^\circ = 11.47$$

$$\frac{\sin 77^\circ}{c} = \frac{1}{12} \text{ donc } c = 12 \sin 77^\circ = 11.69$$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien