Chapitre 5

PROJECTION D'UNPOINT SUR UNE DROITE PARALLELEMENT à UNE AUTRE DROITE

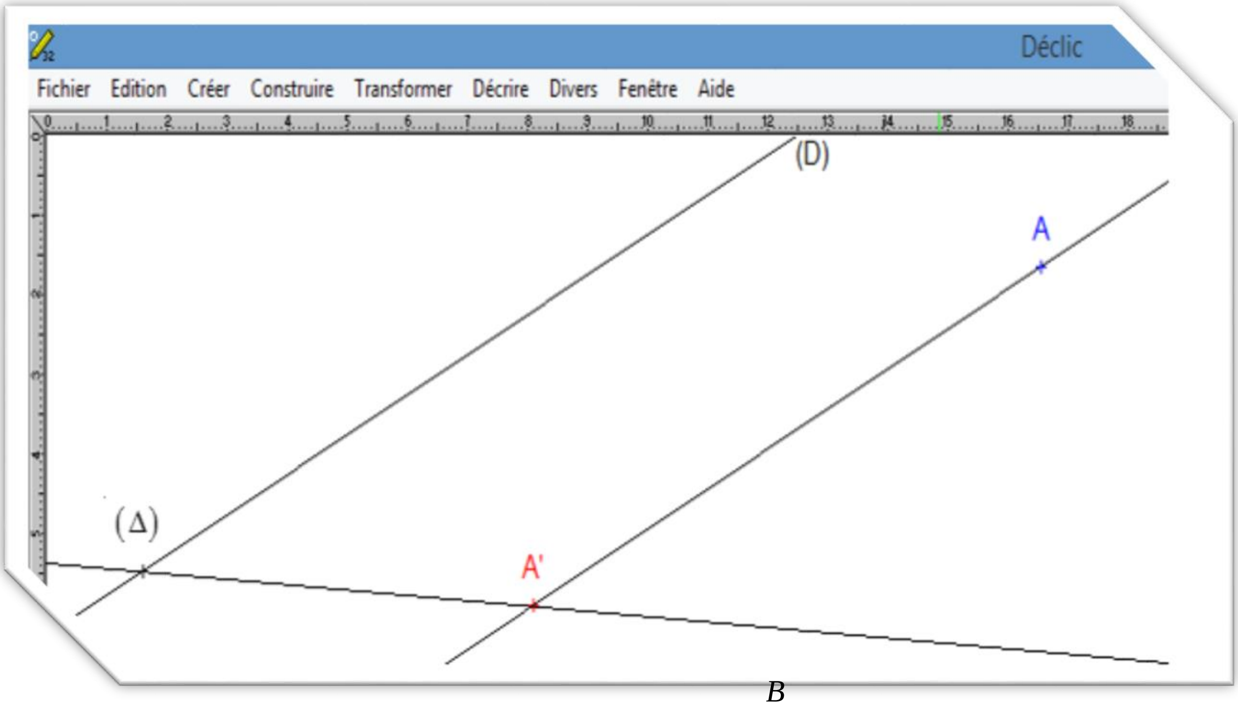
Compétences exigibles

i. **Définition**
ii. **Théorème de Thales**
iii. **Conservation de coefficient de colinéarité de 2 vecteurs**

1_projection d'un point sur une droite parallèlement à une autre droite

Activite1

On suppose les fils des rayons du soleil prennent la direction de la droite (D) et la droite (Δ) représente la surface du sol. L'ombre du point A sur le sol est le point A' l'intersection de la droite (Δ) avec la droite passant par A et parallèlement à la droite (D) .(voir figure ci contre**).**



B

2_ Vocabulaire

- **Le point A' est appelé projection du point A sur (Δ) parallèlement à (D).**
- $B\in(\Delta)$ **: B est son propre projeté sur (Δ) parallèlement à (D).**

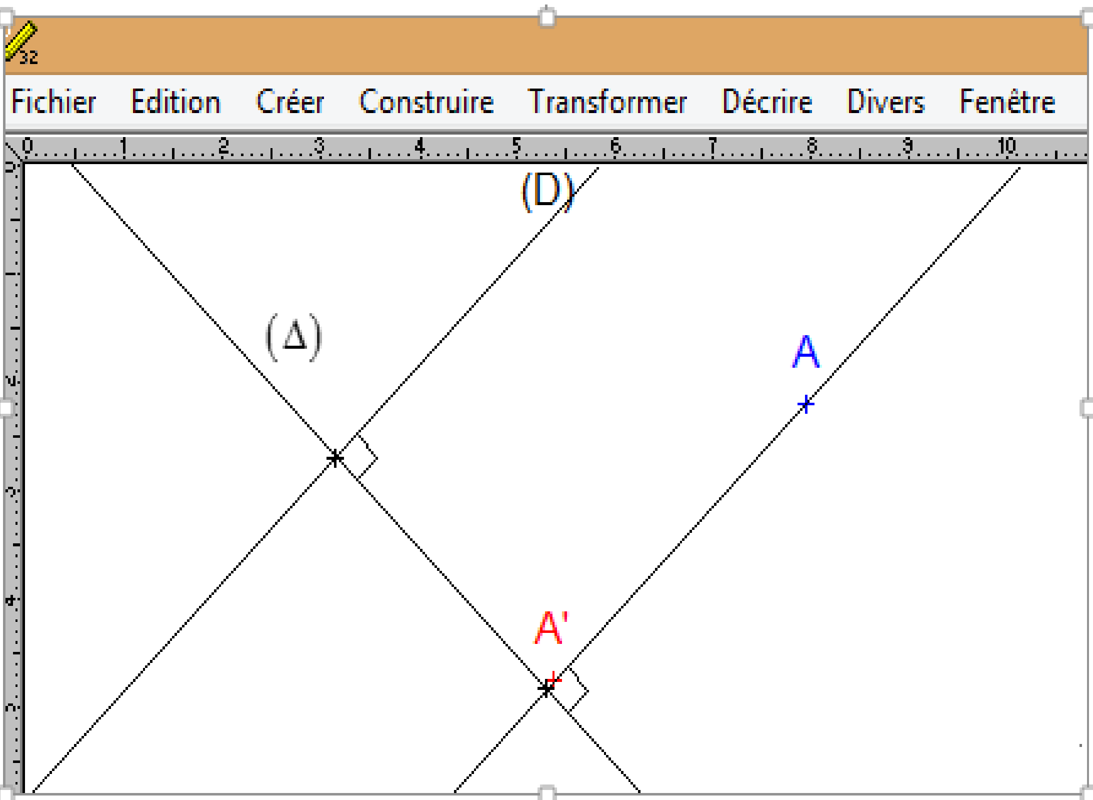
3_ Définition :

Soient (D) et (Δ) deux droites secantes et M un point du plan tel que $M\notin(\Delta)$.

Dire que le point M' est la projection du point M sur (Δ) parallèlement à (D) veut dire : $M'\in(\Delta)\, et\, (MM')\parallel(D)$.

Cas particulier :

Si $(D)\perp(\Delta)$: A' est la projection orthogonale de A sur (Δ).



4_ Application :

On considère (la figure ci contre)

Des points B **,** C **,** F **sont alignes.**

La droite (BC) **est parallèle à** (D)**.**

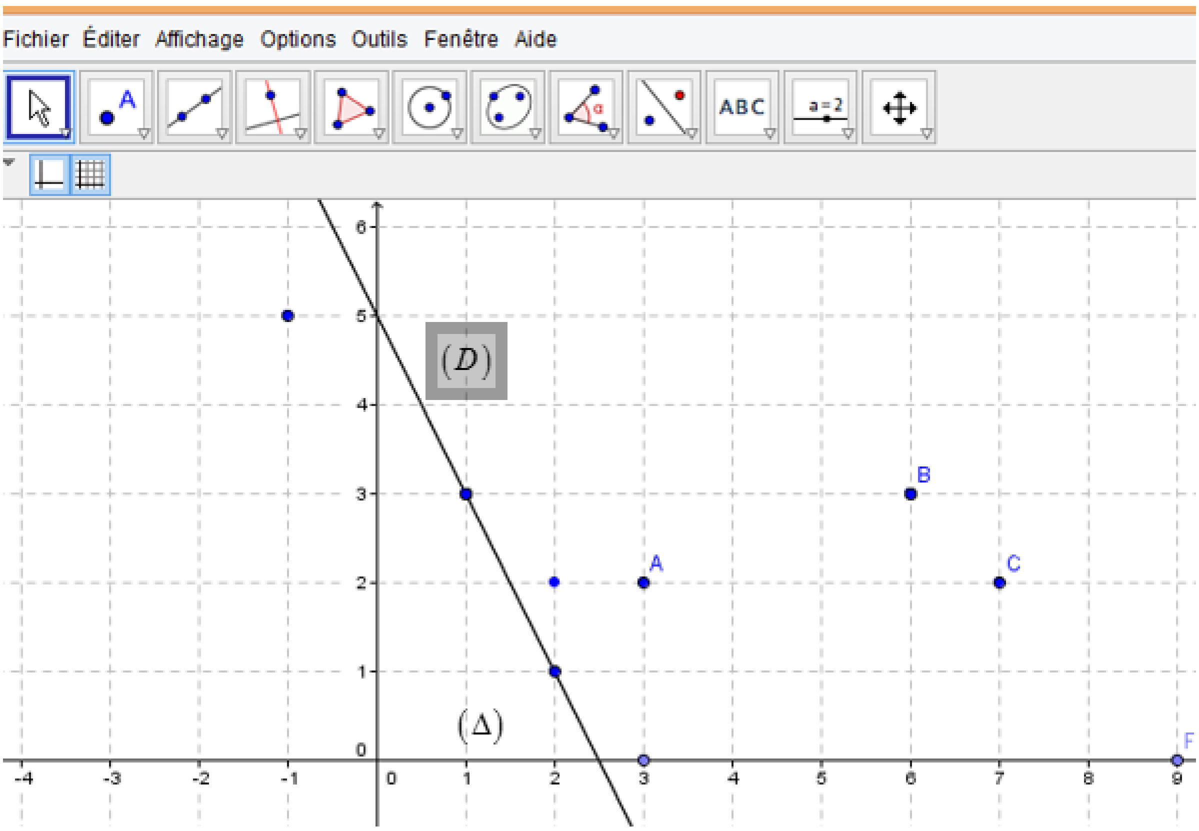
Les points E **et** F **appartiennent à** (Δ)**.**

I. **Déterminer les projections des points** A, B, C, E, F **sur** (Δ) **parallèlement à** (D)**.**

II. **Représenter les projections des points** A, B, C, E, F **sur** (D) **parallèlement à** (Δ)**.**

III. **Déterminer l'ensemble des points du plan dont la projection sur** (Δ) **parallèlement à** (D) **est le point** F **.**

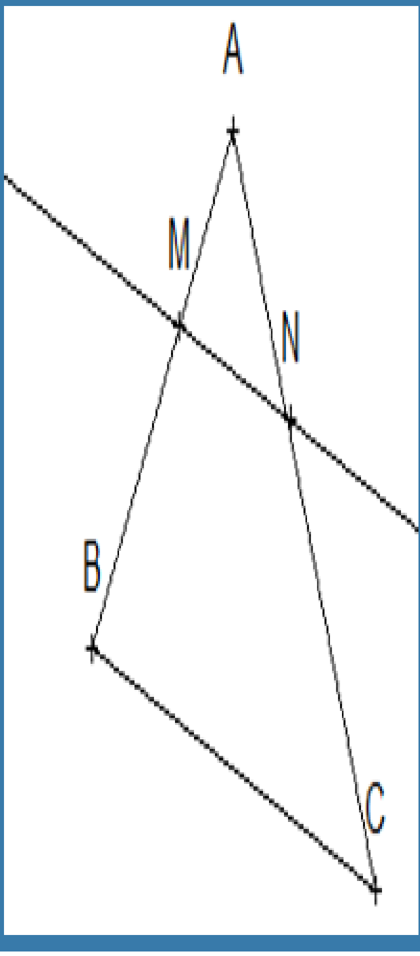
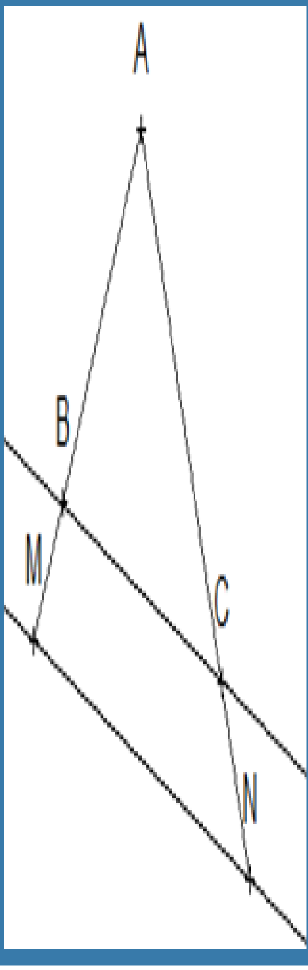
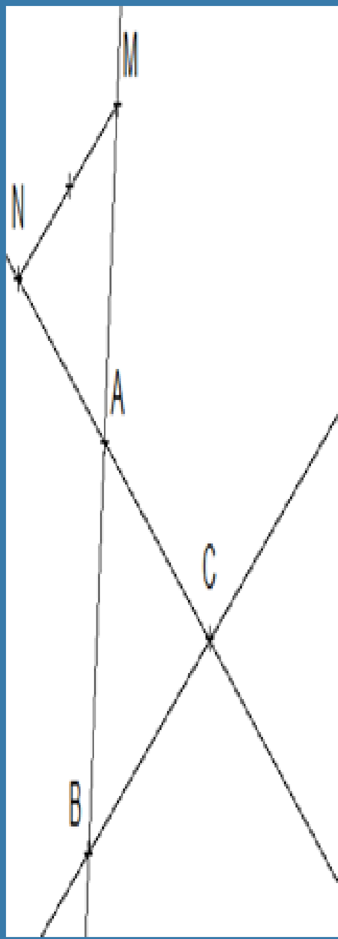
IV. **Construire le point** M **tel que le point** E **est sa projection** (Δ) **parallèlement à** (D) **et que le quadrilatère** $ECFM$ **soit un parallélogramme.**



Ii_Theoreme de Thalès

➢ Théorème de Thalès direct :

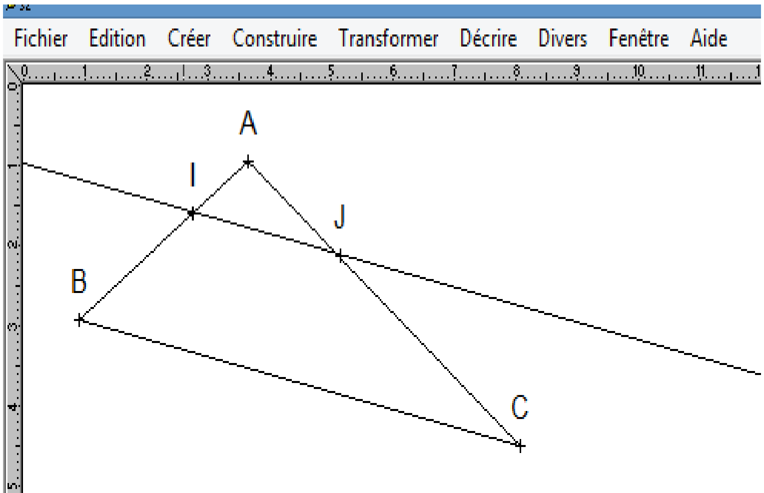
$$\left.\begin{array}{l} *A, B, M \text{ trois points alignes} \\ *A, N, C \text{ trois points alignes} \\ *(MN) \parallel (BC) \end{array}\right\} donc \ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

1 cas	2 cas	3 cas
		

Application :

ABC triangle tel que : $\begin{cases} (IJ) \parallel (BC) \\ AI = 6\,cm ;\ AB = 18\ cm\ ;\ IJ = y\ cm \\ AJ = 5\,cm\ ;\ AC = x\,cm\ ;\ BC = 12\,cm \end{cases}$

Voir figure



1. Enoncer le théorème de Thalès
2. A partir de l'égalité $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$ vérifier que $x = 19\ cm$
3. A partir de l' égalité $\frac{AI}{AB} = \frac{IJ}{BC}$ vérifier que $IJ = 4\,cm$

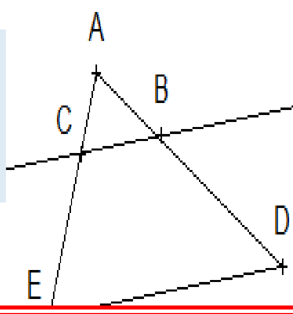
➤ Réciproque du théorème de Thalès

(méthode pour prouver si 2 droites sont parallèles

$\begin{cases} *A, M, B \text{ points alignes} \\ *A, N, C \text{ points alignes} \\ *A, M, B \text{ sont dans le meme ordre que } A, N, C \\ \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \end{cases}$ **conclusion :** $(MN) \parallel (BC)$

Exercice résolu

ADE un triangle telque $\begin{cases} B \in [AD]\ ;\ C \in [AB] \\ AB = 4\,cm ;\ AD = 6\,cm \\ AC = 6\,cm\ ;\ AE = 9\,cm \end{cases}$ voir figure :



Montrons que : $(BC) \parallel (DE)$

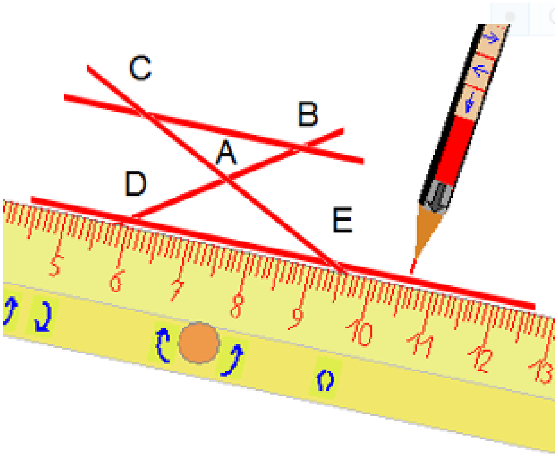
Ona : **donc**

ona : $\begin{cases} * A, B, D \text{ sont alignes} \\ * A, C, E \text{ sont alignes} \\ * A, B, D \text{ sont dans le meme ordre que } A; C; E \\ * \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

donc : $(BC) \parallel (ED)$ **d'après la réciproque du théorème de Thalès**

exercice **:** (voir figure ci contre) montrer que $(BC) \parallel (DE)$

$$\begin{cases} AB = 4{,}5cm \; ; \; AC = 30cm \\ AD = 33cm \; ; \; AE = 22\,cm \end{cases}$$



III_ Conservation du coefficient de colinéarité de 2 vecteurs

Activité :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en A. Les points M, N, P appartiennent à (Δ) talque : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AC}$ et les points M', N', P' sont les projections respectives des points M, N, P sur (Δ) parallèlement à (BC).

1. Faire une figure géométrique
2. En utilisant le théorème de Thalès établir que :
   $\dfrac{AM'}{AB} = 2$; $\dfrac{AN'}{AB} = 5$; $\dfrac{AP'}{AB} = 3$
3. En deduire que $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN'} = 5\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AP'} = -3\overrightarrow{AB}$

Si $M \in (\Delta)$ et M' son projeté sur (D) parallèlement à (BC) telque $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AC}$ avec $\alpha \in IR$. Quelle conjecture peut-on dire à propos des 2 vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

regle : (D) et (Δ) deux droites sécantes.

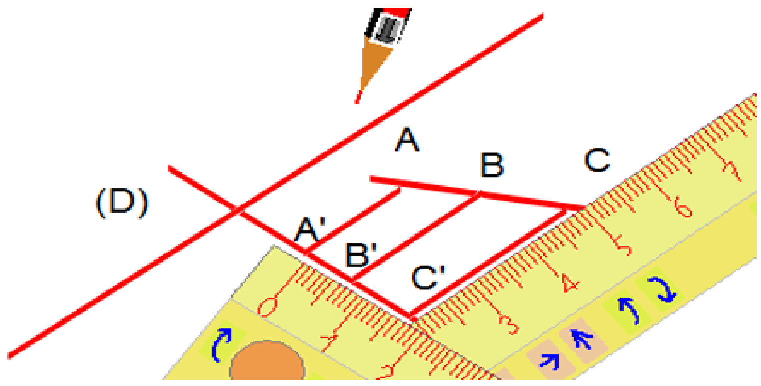
A, B, C, D des points du plan et A', B', C', D' leurs projections (resp) sur (D) parallèlement à (Δ).

Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A'C'}$

Si $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$

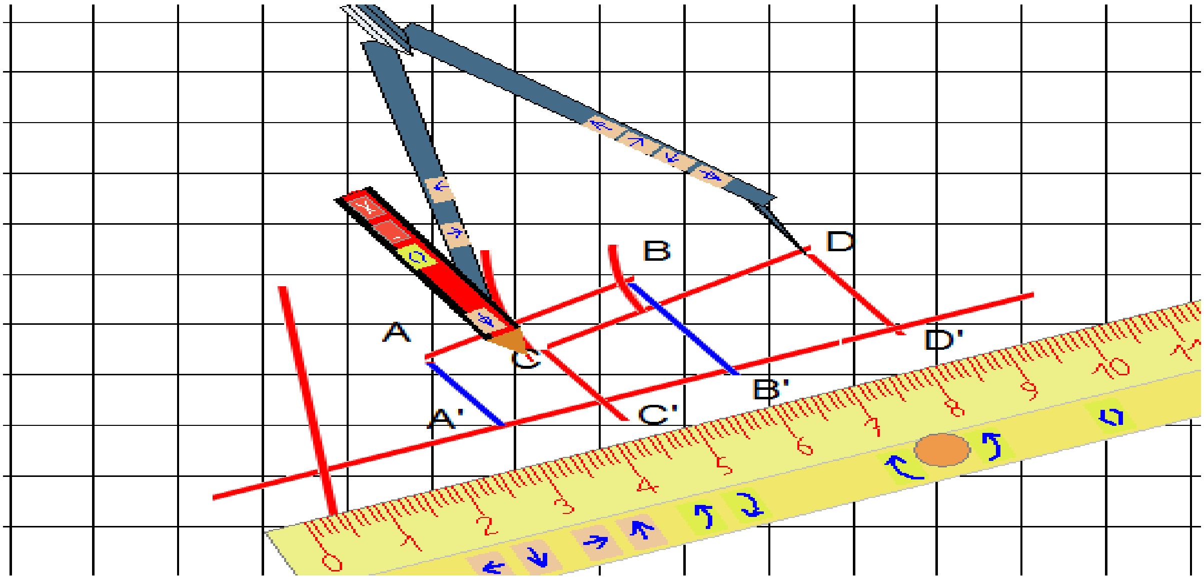
1cas

$si : \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$

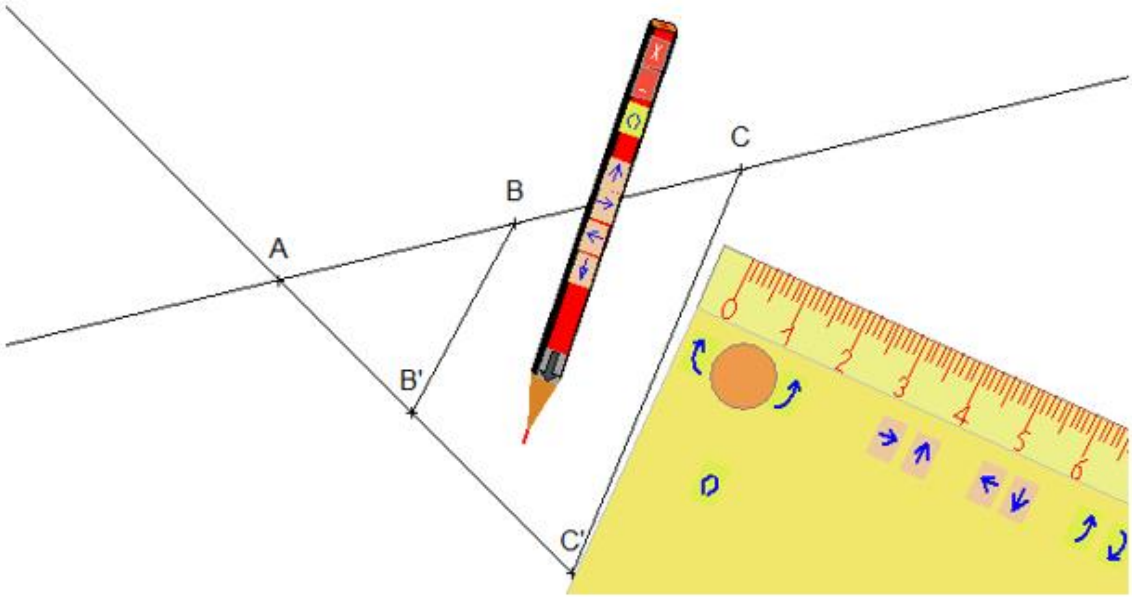


2 cas :

Si : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$



3cas : si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AB'}$



Exercice résolu :

Soit ABC un triangle et $M \in [AB]$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et N le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC).

Montrons que : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

- ✓ A **est sa propre projection sur** (AC) **parallèlement à** (BC)
- ✓ N est la **projection de** M **sur** (AC) **parallèlement à** (BC)
- ✓ C est la **projection de** B **sur** (AC) **parallèlement à** (BC)

Et comme $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **car la projection conserve le coefficient de colinéarité.**