

L'ordre dans :  $\mathbb{R}$ 

**Exercice1:** comparer  $\frac{101}{102}$  et  $\frac{100}{101}$

**SOLUTION :**

$$\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$$

$$\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^+ \text{ donc : } \frac{101}{102} \geq \frac{100}{101}$$

**Exercice2:** comparer  $a$  et  $b$

$$a = 2 + \sqrt{3} \text{ et } b = 2\sqrt{3}$$

**SOLUTION :**  $a - b = 2 - \sqrt{3}$  nombre positif

**cad :**  $a - b \in \mathbb{R}^{*+}$  donc :  $a > b$

**Exercice3:** comparer  $2a$  et  $a^2 + 1$  avec  $a \in \mathbb{R}$

**SOLUTION :**  $(a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$

**Donc :**  $a^2 + 1 \geq 2a$  si  $a \in \mathbb{R}$

**Exercice4 :** I) comparer les réels suivants :

$$1) \frac{8}{11} \text{ et } \frac{5}{11} \quad 2) \frac{13}{9} \text{ et } \frac{13}{6} \quad 3) \frac{-15}{7} \text{ et } \frac{-15}{4}$$

$$4) \frac{-12}{7} \text{ et } \frac{15}{4} \quad 5) 2\sqrt{5} \text{ et } 5\sqrt{2}$$

II) soient  $a$  et  $b$  deux réels tel que :  $a \leq b$

comparer : 1)  $5a$  et  $5b$     2)  $-13a$  et  $-13b$

III) soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs tel que :

$a \leq b$  comparer : 1)  $a^2$  et  $b^2$     2)  $\sqrt{a}$  et  $\sqrt{b}$

$$3) \frac{1}{a} \text{ et } \frac{1}{b}$$

IV) soient  $a$  et  $b$  deux réels négatifs tel que :  $a \leq b$

comparer :  $a^2$  et  $b^2$

**SOLUTION : I)** Comparer  $a$  et  $b$  revient à étudier le signe de :  $a - b$ .

$$1) \text{ on compare } \frac{8}{11} \text{ et } \frac{5}{11}$$

$$\frac{8}{11} - \frac{5}{11} = \frac{8-5}{11} = \frac{3}{11} \geq 0 \text{ donc } \frac{8}{11} \geq \frac{5}{11}$$

$$2) \text{ on compare } \frac{13}{9} \text{ et } \frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{6} - \frac{13}{9} = \frac{39-26}{18} = \frac{13}{18} > 0 \text{ donc } \frac{13}{6} > \frac{13}{9} \text{ ou } \frac{13}{6} \geq \frac{13}{9}$$

$$3) \text{ on compare } \frac{-15}{7} \text{ et } \frac{-15}{4}$$

$$\frac{-15}{7} - \left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{-15}{7} + \frac{15}{4} = \frac{-60+105}{28} = \frac{45}{28} > 0$$

$$\text{donc } \frac{-15}{7} > -\frac{15}{4} \text{ ou } \frac{-15}{7} \geq -\frac{15}{4}$$

$$4) \text{ on compare } \frac{-12}{7} \text{ et } \frac{15}{4}$$

$$\frac{-12}{7} - \frac{15}{4} = \frac{-48-105}{28} = \frac{-165}{28} < 0 \text{ donc } \frac{-12}{7} < \frac{15}{4}$$

$$\text{ou } \frac{-12}{7} \leq \frac{15}{4}$$

$$5) \text{ on compare } 2\sqrt{5} \text{ et } 5\sqrt{2}$$

$$\text{On a } (2\sqrt{5})^2 = 20 \text{ et } (5\sqrt{2})^2 = 50 \text{ et}$$

$50 - 20 = 30 > 0$  et puisque  $2\sqrt{5}$  et  $5\sqrt{2}$  sont positifs alors  $5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$

II) soient  $a$  et  $b$  deux réels tel que :  $a \leq b$

1) on compare  $5a$  et  $5b$

On a :  $5a - 5b = 5(a - b)$  et puisque  $a \leq b$  alors  $a - b \leq 0$

Et on a :  $5 > 0$  donc  $5a \leq 5b$

2) on compare  $-13a$  et  $-13b$

On a :  $-13a - (-13b) = -13a + 13b = -13(a - b)$  et puisque  $a \leq b$  alors  $a - b \leq 0$

Et on a :  $-13 < 0$  donc  $-13a \geq -13b$

III) soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs tel que :  $a \leq b$

1) on compare :  $a^2$  et  $b^2$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

On a :  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs donc  $a + b \geq 0$

et puisque  $a \leq b$  alors  $a - b \leq 0$

alors :  $(a - b)(a + b) \leq 0$

D'où  $a^2 \leq b^2$

2) on compare :  $\sqrt{a}$  et  $\sqrt{b}$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

On a :  $a \leq b$  alors  $a - b \leq 0$

et puisque  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$  car c'est la somme de deux nombres positifs

donc  $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq 0$  D'où  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

3) on compare :  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

On a :  $a \leq b$  alors  $b-a \geq 0$

et puisque  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs alors  $ab > 0$  car c'est la produit de deux nombres positifs

donc  $\frac{b-a}{ab} \geq 0$  D'où  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

IV) soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement négatifs tel que :  $a \leq b$

on compare :  $a^2$  et  $b^2$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

On a :  $a$  et  $b$  deux réels négatifs donc  $a+b \leq 0$

et puisque  $a \leq b$  alors  $a-b \leq 0$  alors :  $(a-b)(a+b) \geq 0$

D'où  $a^2 \geq b^2$

**Exercice5:** Soit  $a$  est un réel strictement positif.

1. montrer que : Si  $a > 1$ , alors  $a^3 > a^2 > a$

2. montrer que : si  $a < 1$ , alors  $a^3 < a^2 < a$ .

**Réponse :** De l'hypothèse  $a > 1$ , on déduit d'une part que  $a^2 > a$  (on multiplie les deux membres par  $a > 0$ ) et d'autre part que  $a^3 > a^2$  (on multiplie par  $a^2 > 0$ ). Donc  $a^3 > a^2 > a$ .

De la même façon, lorsque  $0 < a < 1$ , on démontre que :  $a^3 < a^2 < a$ .

**Exercice6:** comparer  $a$  et  $b$  :

$$a = \sqrt{6} \text{ et } b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

**Réponse :**

$$a-b = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} \times (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a-b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1)$$

on compare :  $\sqrt{2}$  et 1

$$\text{On a } (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ et } (1)^2 = 1 \text{ donc } \sqrt{2} > 1$$

par suite  $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$

$$\text{On a } (\sqrt{3})^2 = 3 \text{ et } (1)^2 = 1 \text{ donc } \sqrt{3} > 1$$

par suite  $(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$  Donc

$$a-b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{**}$$

D'où  $a > b$

**Exercice7:** soit  $x \in \mathbb{R}^{**}$

1) Comparer :  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$  et  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$

2) En déduire une comparaison de :  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  et

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$$

**Réponse :** 1) On a  $x+2 \geq x$  car  $(x+2) - x \geq 0$

$$\text{Donc } \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$$

On ajoutant  $\sqrt{x+1}$  au deux membres on trouve :

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

$$2) \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \text{ (le conjugué)}$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$\text{Et on aussi : } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\text{Et puisque : } \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

$$\text{D'où } \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$$

**Exercice8:** soit  $a \in \mathbb{R}^{**}$  et  $b \in \mathbb{R}^{**}$

$$\text{Comparer : } x = \frac{7a+2b}{7a} \text{ et } y = \frac{8b}{7a+2b}$$

**Réponse :** On a  $x+2 \geq x$  car  $(x+2) - x \geq 0$

$$x - y = \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b}$$

$$x - y = \frac{(7a+2b)^2 - 7a \times 8b}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2 + 14ab + 14ab + 4b^2 - 56a \times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{49a^2 - 28a \times b + 4b^2}{7a(7a+2b)} = \frac{(7a)^2 - 2 \times 7a \times 2b + (2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{(7a - 2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^+$$

car  $7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^+$  et  $(7a-2b)^2 \in \mathbb{R}^+$  D'où  $x \geq y$

**Exercice9:** calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de valeur absolue)

$$1) |-3| \quad 2) |3| \quad 3) \left| -\frac{3}{5} \right| \quad 4) |\sqrt{5} - 2| \quad 5) |1 - \sqrt{3}|$$

$$6) |\pi - 4| \quad 7) |\sqrt{2} - \sqrt{7}| \quad 8) |3 - 2\sqrt{3}|$$

$$9) A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$$

$$\text{Solution :1) } |-3| = -(-3) = 3 \quad 2) |3| = 3 \quad 3) \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5}$$

$$4) |\sqrt{5} - 2| \quad \text{on compare : } \sqrt{5} \text{ et } 2$$

On a  $(\sqrt{5})^2 = 5$  et  $(2)^2 = 4$  donc  $\sqrt{5} > 2$  par suite

$$(\sqrt{5} - 2) \in \mathbb{R}^{**} \text{ Donc } |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$$

5)  $|1 - \sqrt{3}|$  on compare :  $\sqrt{3}$  et 1

On a  $(\sqrt{3})^2 = 3$  et  $(1)^2 = 1$  donc  $\sqrt{3} > 1$  par suite

$$(1 - \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^{-*} \text{ donc } |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

6)  $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4$  car  $4 > \pi$

7)  $|\sqrt{2} - \sqrt{7}|$  on compare :  $\sqrt{7}$  et  $\sqrt{2}$

On a  $(\sqrt{7})^2 = 7$  et  $(\sqrt{2})^2 = 2$  donc  $\sqrt{7} > \sqrt{2}$

par suite  $\sqrt{2} - \sqrt{7} < 0$

$$\text{Donc } |\sqrt{2} - \sqrt{7}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{7}) = -\sqrt{2} + \sqrt{7}$$

8) on a  $3 < 2\sqrt{3}$  car  $3^2 < (2\sqrt{3})^2$

$$\text{Donc } : 3 - 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^{-}$$

$$\text{Donc } : |3 - 2\sqrt{3}| = -(3 - 2\sqrt{3}) = -3 + 2\sqrt{3}$$

9) on a :  $\sqrt{5} > \sqrt{2}$  donc :  $\sqrt{5} - \sqrt{2} \in \mathbb{R}^{+}$  donc :  $|\sqrt{5} - \sqrt{2}| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$

$$A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$$

$$A = 4 - 2\sqrt{3} - (5 - 3\sqrt{3}) + (5\sqrt{3} - 9)$$

$$A = 4 - 2\sqrt{3} + 5 - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 9 = 0$$

### Exercice10: (Résolution des équations)

Résoudre les équations suivantes :

1)  $|x - 1| = 5$     2)  $|2x + 1| = |x - 3|$     3)  $|x + 2| = -1$

**Réponse : 1)**  $|x - 1| = 5$

$$|x - 1| = 5 \text{ ssi } x - 1 = 5 \text{ ou } x - 1 = -5$$

$$\text{ssi } x = 6 \text{ ou } x = -4 \text{ donc } : S = \{-4; 6\}$$

2)  $|2x + 1| = |x - 3|$  ssi  $2x + 1 = x - 3$  ou  $2x + 1 = -(x - 3)$

$$\text{ssi } 2x + 1 = x - 3 \text{ ou } 2x + 1 = -x + 3$$

$$\text{ssi } x = -4 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \text{ donc } : S = \left\{ -4; \frac{2}{3} \right\}$$

3)  $|x + 2| = -1$   $S = \emptyset$  car  $|x + 2| \geq 0$

**Exercice11:** 1) calculer  $(3\sqrt{2} - 5)^2$

2) comparer :  $3\sqrt{2}$  et 5

3) simplifier  $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$

### Réponse : 1)

$$(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 18 - 30\sqrt{2} + 25$$

$$(3\sqrt{2} - 5)^2 = 43 - 30\sqrt{2}$$

2)  $(3\sqrt{2})^2 = 18$  et  $(5)^2 = 25$

$$\text{Donc } 3\sqrt{2} > 5 \text{ donc } 3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^{-}$$

$$3) \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 5)^2} = |3\sqrt{2} - 5| = -(3\sqrt{2} - 5)$$

$$\text{car } 3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^{-} \text{ donc } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} + 5$$

### Exercice12: simplifier si c'est possible

1)  $[2 ; 5] \cap [4 ; 6]$     2)  $[2 ; 5] \cup [4 ; 6]$

3)  $]-\infty ; 2] \cap [-1 ; +\infty[$     4)  $]-\infty ; 2] \cup [-1 ; +\infty[$

### Solution :

1)  $[2 ; 5] \cap [4 ; 6] = [4 ; 5]$     2)  $[2 ; 5] \cup [4 ; 6] = [2 ; 6]$ .



3)  $]-\infty ; 2] \cap [-1 ; +\infty[ = [-1 ; 2]$



4)  $]-\infty ; 2] \cup [-1 ; +\infty[ = ]-\infty ; +\infty[$

### Exercice13: calculer $I \cap J$ et $I \cup J$ dans les cas suivants

$J = [-1, +\infty[$  et  $I = ]-3, 7]$

$J = [4, 10]$  et  $I = ]-\infty, 5]$

$I = [0, 10[$  et  $J = [-5, -1]$

$I = \left[ -\frac{2}{3}, 2 \right]$  et  $J = \left] -1, \frac{3}{2} \right[$

**Réponse.**  $I \cap J = ]-1, 7]$  et  $I \cup J = ]-3, +\infty[$

$$I \cap J = [4, 5[ \text{ et } I \cup J = ]-\infty, 10]$$

$$I \cap J = \emptyset \text{ et } I \cup J = [-5, 10]$$

$$I \cap J = \left[ -\frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right[ \text{ et } I \cup J = ]-1, 2]$$

### Exercice14: représenter chaque inégalité ou encadrement

par l'intervalle qui convient ; 1)  $x \geq -3$     2)  $x < 5$

3)  $1 \leq 2x \leq 4$     4)  $0 < 6x - 2 \leq 10$     5)  $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$

**Réponse :** 1)  $x \geq -3$  ssi  $x \in [-3, +\infty[$

2)  $x < 5$  ssi  $x \in ]-\infty, 5]$

3)  $1 \leq 2x \leq 4$  ssi  $\frac{1}{2} \times 1 \leq \frac{1}{2} \times 2x \leq 4 \times \frac{1}{2}$  ssi  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

$$\text{ssi } x \in \left[ \frac{1}{2}, 2 \right]$$

4)  $0 < 6x - 2 \leq 10$  ssi  $0 + 2 < 6x - 2 + 2 \leq 10 + 2$

$$\text{ssi } 2 < 6x \leq 12$$

$$\text{ssi } 2 \times \frac{1}{2} < 6x \times \frac{1}{2} \leq 12 \times \frac{1}{2} \text{ ssi } 1 < 3x \leq 6 \text{ ssi}$$

$$1 \times \frac{1}{3} < 3x \times \frac{1}{3} \leq 6 \times \frac{1}{3} \text{ ssi } \frac{1}{3} < x \leq 2 \text{ ssi } x \in \left] \frac{1}{3}, 2 \right]$$

5)  $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$  ssi  $-8 - 2 \leq 2 - 2x - 2 \leq 6 - 2$

$$\text{ssi } -10 \leq -2x \leq 4$$

$$\text{ssi } -10 \times \frac{1}{2} \leq -2x \times \frac{1}{2} \leq 4 \times \frac{1}{2} \quad \text{ssi } -5 \leq -x \leq 2 \quad \text{ssi}$$

$$-2 \leq x \leq 5 \quad \text{ssi } x \in [-2, 5]$$

**Exercice15:** résoudre les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > 7 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases}$$

**Réponse :** c'est l'intersection

$$1) \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$x \geq -3 \text{ ssi } x \in [-3, +\infty[ \text{ et } x > 2 \text{ ssi } x \in ]2, +\infty[$$

$$S = ]2, +\infty[ \cap [-3, +\infty[ = ]2, +\infty[$$

$$2) \begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$x \leq 4 \text{ ssi } x \in ]-\infty, 4] \text{ et } x > 5 \text{ ssi } ]5, +\infty[$$

$$S = ]5, +\infty[ \cap ]-\infty, 4] = \emptyset$$

$$3) x > 7 \text{ ssi } x \in ]7, +\infty[ \text{ et } x \geq 0 \text{ ssi } x \in [0, +\infty[$$

$$S = ]7, +\infty[ \cap [0, +\infty[ = ]7, +\infty[$$

$$4) \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases}$$

$$x \in ]-7; 10[ \quad \text{ssi} \quad -7 < x < 10$$

$$-3 \leq x \leq 0 \text{ ssi } x \in [-3; 0]$$

$$S = ]-7; 10[ \cap [-3; 0] = [-3; 0]$$

**Exercice16:** on considère l'intervalle  $I = [-3; 4]$

Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de l'intervalle  $I$

**Réponse :**

$$\frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \text{ est le milieu de l'intervalle } I$$

$$4 - (-3) = 7 \text{ est l'amplitude de l'intervalle } I$$

$$\frac{4 - (-3)}{2} = \frac{7}{2} \text{ est le rayon de l'intervalle } I$$

**Exercice17 :** (Résolution des inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :  $|2x+1| < 6$

$$1) |x-1| \leq 2 \quad 2) |x+2| \geq 3 \quad 3) |2x+1| < 6$$

**Réponse :** 1)  $|x-1| \leq 2$  ssi  $-2 \leq x-1 \leq 2$  ssi  $-2+1 \leq x-1+1 \leq 2+1$  ssi  $-1 \leq x \leq 3$  donc  $S = [-1; 3]$

$$2) |x+2| \geq 3 \text{ ssi } x+2 \geq 3 \text{ ou } x+2 \leq -3$$

$$\text{Ssi } x \geq 1 \text{ ou } x \leq -5$$

$$\text{Ssi } x \in [1; +\infty[ \text{ ou } x \in ]-\infty; -5]$$

$$\text{Donc } S = ]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$$

$$3) |2x+1| < 6 \text{ ssi } -6 < 2x+1 < 6$$

$$\text{ssi } -6-1 < 2x+1-1 < 6-1 \text{ ssi } -7 < 2x < 5$$

$$\text{ssi } -7 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 5 \times \frac{1}{2} \text{ ssi } \frac{-7}{2} < x < \frac{5}{2} \text{ donc : } S = \left] -\frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right[$$

**Exercice18:** Soit  $x$  et  $y$  deux réels tq :  $x \geq \frac{1}{2}$  et  $y \leq 1$

$$\text{et } x - y = 3$$

$$1) \text{ Calculer : } E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$$

$$2) \text{ Montrer que : } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ et } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$3) \text{ Calculer : } F = |x+y-5| + |x+y+2|$$

**Réponse :** 1)

$$E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2} = |2x-1| + |2y-2|$$

$$\text{On a } x \geq \frac{1}{2} \text{ donc } 2x \geq 1 \text{ donc } 2x-1 \geq 0$$

$$\text{Et on a } y \leq 1 \text{ donc } 2y \leq 2 \text{ donc } 2y-2 \leq 0$$

$$\text{donc } E = |2x-1| + |2y-2| = 2x-1 - (2y-2)$$

$$\text{donc } E = 2x-2y+1 = 2(x-y)+1$$

$$\text{et on a } x-y=3 \text{ donc } E = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$2) \text{ on montre que } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ ???}$$

$$\text{On a } x-y=3 \text{ donc } x=y+3$$

$$\text{Et on a } x \geq \frac{1}{2} \text{ donc } y+3 \geq \frac{1}{2} \text{ donc } y \geq \frac{1}{2} - 3 \text{ donc } y \geq -\frac{5}{2}$$

$$\text{Et on a } y \leq 1 \text{ donc } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$\text{on montre que } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ ???}$$

$$\text{On a } x-y=3 \text{ donc } y=x-3$$

$$\text{Et On a } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ donc } -\frac{5}{2} \leq x-3 \leq 1 \text{ donc}$$

$$-\frac{5}{2} + 3 \leq x-3+3 \leq 1+3 \text{ D'où } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$3) F = |x+y-5| + |x+y+2| \text{ ?????}$$

$$\text{On cherche le signe de : } x+y-5$$

$$\text{On a } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ donc } \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \leq x+y \leq 1+4$$

$$\text{donc } -2 \leq x+y \leq 5$$

$$\text{donc } -2-5 \leq x+y-5 \leq 5-5 \text{ donc } -7 \leq x+y-5 \leq 0$$

$$\text{donc } x+y-5 \leq 0$$

$$\text{On cherche le signe de : } x+y+2$$

$$\text{On a } -2 \leq x+y \leq 5 \text{ donc } -2+2 \leq x+y+2 \leq 5+2$$

$$\text{donc } 0 \leq x+y+2 \leq 7$$

$$\text{donc } x+y+2 \geq 0$$

$$\text{donc } F = |x+y-5| + |x+y+2| = -(x+y-5) + x+y+2$$

$$F = -x-y+5+x+y+2 = -x-y+5+x+y+2 = 7$$

**Exercice19:** sachant que :  $(\sqrt{3} \approx 1.732050808...)$

donner un encadrement du réel  $\sqrt{3}$  à  $10^{-2}$  près

Et préciser la valeur par défaut et par excès

**Solution :** On a : ( $\sqrt{3} \approx 1.732050808\dots$ )

Donc ①  $1.73 \leq \sqrt{3} \leq 1.74$  et ②  $1.732 \leq \sqrt{3} \leq 1.733$

① est un encadrement du réel  $\sqrt{3}$  à  $1.74 - 1.73$  près

c à d à  $10^{-2} = 0.01$  près

② est un encadrement du réel  $\sqrt{3}$  à  $1.733 - 1.732$  près

c à d à  $10^{-3} = 0.001$  près

Et on a  $1.73$  est une approximation du réel  $\sqrt{3}$  par défaut à  $10^{-2}$  près

$1.74$  est une approximation du réel  $\sqrt{3}$  par excès à  $10^{-2}$  près

**Exercice20 :**  $x$  est un réel tel que  $-1 < x < 2$ . On pose  $B = -2x - 3$ .

Trouver un encadrement de  $B$  et trouver son amplitude

**Exercice21 :**  $x \in [1; 3]$  et  $y \in [2; 4]$

1) Trouver un encadrement de :  $x^2$  et  $y^2$  et  $2x$  et  $3y$

et  $-x$  et  $-y$  et  $\frac{1}{x}$  et  $\frac{1}{y}$  et  $\frac{x}{y}$

2) Trouver un encadrement de :  $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$  et

$B = \frac{2x-1}{x+1}$  et trouver les amplitudes des encadrements

**Solution :**

1)  $x \in [1; 3]$  ssi  $1 \leq x \leq 3$  et  $y \in [2; 4]$  ssi  $2 \leq y \leq 4$

On a  $1 \leq x \leq 3$  donc  $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$  donc  $1 \leq x^2 \leq 9$

On a  $2 \leq y \leq 4$  donc  $2^2 \leq y^2 \leq 4^2$  donc  $4 \leq y^2 \leq 16$

On a  $1 \leq x \leq 3$  donc  $2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3$  donc  $2 \leq 2x \leq 6$

On a  $2 \leq y \leq 4$  donc  $3 \times 2 \leq 3 \times y \leq 3 \times 4$  donc

$6 \leq 3y \leq 12$

On a  $1 \leq x \leq 3$  donc  $-3 \leq -x \leq -1$

On a  $2 \leq y \leq 4$  donc  $-4 \leq -y \leq -2$

On a  $1 \leq x \leq 3$  donc  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

On a  $2 \leq y \leq 4$  donc  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

On a  $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$  donc  $1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2}$  donc  $\frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

2) encadrement de  $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$

$6 \leq 3y \leq 12$  donc  $-12 \leq -3y \leq -6$

On fait la somme membre a membre on trouve :

$1 + 4 + 2 - 12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9 + 16 + 6 - 6$

Donc ①  $-5 \leq A \leq 25$  ① est un encadrement du réel  $A$

à  $25 - (-5) = 30$  près

encadrement de  $B = \frac{2x-1}{x+1}$

On a  $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$

et on a  $1 \leq x \leq 3$  donc  $2 \leq 2x \leq 6$  donc

$2 - 1 \leq 2x - 1 \leq 6 - 1$  donc  $1 \leq 2x - 1 \leq 5$  ③

et on a  $1 \leq x \leq 3$  donc  $2 \leq x + 1 \leq 4$  donc  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$  ④

On fait la produit membre a membre de ③ et ④ on trouve :

$1 \times \frac{1}{4} \leq (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \leq 5 \times \frac{1}{2}$

donc  $\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2}$  est un encadrement du réel  $B$

d'amplitudes  $r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

**Exercice22 :** 1) Vérifier que  $14^2 < 200 < 15^2$  et en déduire que ;  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) Trouver un encadrement de :  $\sqrt{5}$

3) en déduire un encadrement de :  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  et  $\sqrt{10}$

**Solution :** 1) on a  $14^2 = 196$  et  $15^2 = 225$  donc

$14^2 < 200 < 15^2$  donc  $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

donc  $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$  donc  $14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$

donc  $14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$

donc  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) on a  $22^2 = 484$  et  $23^2 = 529$  donc  $22^2 < 500 < 23^2$

donc  $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

donc  $22 < \sqrt{5} \times 10 < 23$  donc

$22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$  donc  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3) ) on a  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  et  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$  donc

$1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$

donc  $3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$

on a  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  et  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$  donc

$1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3$  donc  $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

**Exercice23 :**  $x \in [-3; 1]$  et  $y \in [-6; -2]$

Trouver un encadrement de : 1)  $x + y$  2)  $x - y$  3)  $x^2$

4)  $y^2$  5)  $x \times y$  6)  $\frac{x}{y}$

**Solution :** 1)  $x \in [-3; 1]$  ssi  $-3 \leq x \leq 1$

$y \in [-6; -2]$  ssi  $-6 \leq y \leq -2$

donc  $(-3) + (-6) \leq x + y \leq 1 + (-2)$

donc  $-9 \leq x + y \leq -1$

2) On a  $x - y = x + (-y)$  et on a  $-6 \leq y \leq -2$

donc  $2 \leq -y \leq 6$

donc  $(-3) + 2 \leq x + (-y) \leq 1 + 6$

donc  $-1 \leq x - y \leq 7$

3) On a  $-3 \leq x \leq 1$  donc  $0 \leq x \leq 1$  ou  $-3 \leq x \leq 0$

donc  $0^2 \leq x^2 \leq 1^2$  ou  $0^2 \leq x^2 \leq (-3)^2$

donc  $0 \leq x^2 \leq 1$  ou  $0 \leq x^2 \leq 9$

donc  $0 \leq x^2 \leq 9$

4) On a  $-6 \leq y \leq -2$  donc  $(-2)^2 \leq y^2 \leq (-6)^2$

donc  $4 \leq y^2 \leq 36$

5) encadrement de :  $x \times y$

$-3 \leq x \leq 1$  et  $-6 \leq y \leq -2$

Si  $0 \leq x \leq 1$

on a  $-6 \leq y \leq -2$  alors on a  $2 \leq -y \leq 6$

donc  $0 \leq -xy \leq 6$  donc ①  $-6 \leq xy \leq 0$

Si  $-3 \leq x \leq 0$  alors  $0 \leq -x \leq 3$  et on a  $2 \leq -y \leq 6$

donc ②  $0 \leq xy \leq 18$

D'après ① et ② on déduit que :  $-6 \leq xy \leq 18$

6) encadrement de :  $\frac{x}{y}$   $-3 \leq x \leq 1$  On a

$-6 \leq y \leq -2$  donc  $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{6}$

donc  $\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

Si  $0 \leq x \leq 1$

on a  $\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$  alors  $0 \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{2}$  donc

$0 \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$  donc ③  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 0$

Si  $-3 \leq x \leq 0$  alors  $0 \leq -x \leq 3$  et on a  $\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

donc ④  $0 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

D'après ③ et ④ on déduit que :  $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

**Exercice24 :** sachant que :  $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$

montrer que :  $|\sqrt{2} - 1,40| < 0,02$

Que peut-on déduire ?

**Solution :** on a donc  $1,40 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$

$-0,02 < \sqrt{2} - 1,40 < 0,02$  donc  $|\sqrt{2} - 1,40| < 0,02$

donc  $1,40$  est une valeur approchée du nombre  $\sqrt{2}$  à  $0,02$  près

on a  $1,40 \leq \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$  donc  $1,40$  est une valeur approchée par défaut du nombre  $\sqrt{2}$  à  $0,02$  près

on a  $1,42 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,42$  donc  $1,42$  est une valeur approchée par excès du nombre  $\sqrt{2}$  à  $0,02$  près

**Exercice25 :** sachant que :  $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$

a) Que représente  $2,645$  pour  $\sqrt{7}$  ?

a) Que représente  $2,646$  pour  $\sqrt{7}$  ?

**Solution :**

a)  $2,645$  est une valeur approchée du réel  $\sqrt{7}$  par défaut à  $10^{-3}$  près

b)  $2,646$  est une valeur approchée du réel  $\sqrt{7}$  par excès à  $10^{-3}$  près

**Exercice26 :** soit  $x \in \mathbb{R}^+$

Comparer  $2\sqrt{x} - 1$  et  $x$

**Solution :**

$$x - (2\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \times 1 + 1^2 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$$

Donc :  $x \geq (2\sqrt{x} - 1)$  si  $x \in \mathbb{R}^+$

**Exercice27 :** soit  $n \in \mathbb{N}$

On pose :  $a = \sqrt{4n^2 + 1}$  et  $b = 2n + 1$

Comparer  $a$  et  $b$

**Solution :** on a :  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $b \in \mathbb{R}^+$

$$a^2 = (\sqrt{4n^2 + 1})^2 = 4n^2 + 1 \text{ et } b^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$b^2 - a^2 = 4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 1) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 1$$

$$b^2 - a^2 = 4n \geq 0 \text{ donc } b^2 \geq a^2$$

Donc :  $b \geq a$  si  $n \in \mathbb{N}$

**Exercice28 :** soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :

$x < y < 3$

1) Montrer que :  $x + y - 6 < 0$

2) Comparer  $a = x^2 - 6x + 1$  et  $b = y^2 - 6y + 1$

**Solution :1)** on a  $x < y < 3$  donc  $x < 3$  et  $y < 3$

Donc :  $x + y < 6$  donc  $x + y - 6 < 0$

$$2) a - b = (x^2 - 6x + 1) - (y^2 - 6y + 1)$$

$$a - b = x^2 - 6x + 1 - y^2 + 6y - 1 = x^2 - y^2 - 6x + 6y$$

$$a - b = (x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6)$$

On a :  $x < y$  donc  $x - y \in \mathbb{R}^-$

Et on a :  $x + y - 6 \in \mathbb{R}^-$

Donc :  $(x - y)(x + y - 6) \in \mathbb{R}^+$

Donc :  $a - b \in \mathbb{R}^+$  et par suite  $a \geq b$

**Exercice29 :** on pose  $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

1) donner le signe de :  $B$

2) Calculer  $B^2$

3) donner une écriture simplifiée de  $B$

**Solution :**  $B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

1) on Remarque que :  $6 - 2\sqrt{5} < 6 + 2\sqrt{5}$

Donc :  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} < \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$

Donc :  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \in \mathbb{R}^* \text{ cad } B < 0$

$$2) B^2 = \left( \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \right)^2$$

$$\text{Donc : } B^2 = \left( \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \right)^2 - 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \left( \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \right)^2$$

$$\text{Donc : } B^2 = 6 - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})} + 6 + 2\sqrt{5}$$

$$B^2 = 12 - 2\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 12 - 2\sqrt{6^2 - 20} = 12 - 2\sqrt{16}$$

$$\text{Donc : } B^2 = 12 - 2 \times 4 = 4$$

$$3) B^2 = 4 \text{ ssi } B = \sqrt{4} \text{ ou } B = -\sqrt{4}$$

$$\text{Donc : } B = 2 \text{ ou } B = -2 \text{ or } B < 0 \text{ donc : } B = -2$$

**Exercice30:** on pose :  $a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$  et  $b = \frac{4 + \sqrt{2}}{7}$

1) montrer que :  $b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$

2) comparer  $a$  et  $b$

**Solution :**

$$1) b - a = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{(1 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$$

$$b - a = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2}{4 - 2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8 + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{2}}{14}$$

$$b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$$

2) on a :  $b - a = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{14}$

Or on a :  $8 > 5\sqrt{2}$  car  $(8)^2 = 64$  et  $(5\sqrt{2})^2 = 50$

Donc :  $8 - 5\sqrt{2} \in \mathbb{R}^{**}$  donc :  $\frac{8 - 5\sqrt{2}}{14} \in \mathbb{R}^{**}$

Par suite :  $b > a$

**Exercice31 :**  $a$  un nombre réel

Comparer :  $4a - 1$  et  $4a^2$

**Solution :** on a  $4a^2 - (4a - 1) = 4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2 \geq 0$

Donc :  $4a^2 \geq 4a - 1$

**Exercice32:**

soit  $x$  un élément de l'intervalle  $]-1, +\infty[$

comparer :  $12$  et  $-5x + 1$  on utilisant les propriétés de l'ordre

**Solution :** on a  $x \in ]-1, +\infty[$  donc :  $x > -1$

Donc :  $-5x < -5 \times (-1)$  donc :  $-5x < 5$

Donc : ①  $-5x + 1 < 6$  et on sait que :  $6 < 12$  ②

Donc : de ① et ② en déduit que :  $-5x + 1 < 12$

**Exercice33:1)** montrer que :  $\sqrt{\frac{6 + \sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6 - \sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6 + \sqrt{5}}$

2) montrer que :  $\sqrt{9 - \sqrt{79}} + \sqrt{9 + \sqrt{79}} = \sqrt{18 + \sqrt{8}}$

**Solution :** 1) on pose :  $B = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6 - \sqrt{31}}{2}}$

On va Calculer :  $B^2$ ;

$$B^2 = \left( \sqrt{\frac{6 + \sqrt{31}}{2}} \right)^2 + 2\sqrt{\frac{6 + \sqrt{31}}{2}}\sqrt{\frac{6 - \sqrt{31}}{2}} + \left( \sqrt{\frac{6 - \sqrt{31}}{2}} \right)^2$$

$$B^2 = \frac{6 + \sqrt{31}}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{6 + \sqrt{31}}{2}\right)\left(\frac{6 - \sqrt{31}}{2}\right)} + \frac{6 - \sqrt{31}}{2}$$

$$B^2 = 6 + 2\sqrt{\frac{36 - 1}{4}} = 6 + 2\sqrt{\frac{5}{4}} = 6 + \sqrt{5}$$

Donc :  $B^2 = 6 + \sqrt{5}$  donc :  $B = \sqrt{6 + \sqrt{5}}$  ou  $B = -\sqrt{6 + \sqrt{5}}$

Or  $B > 0$  donc :  $B = \sqrt{6 + \sqrt{5}}$

D'où :  $\sqrt{\frac{6 + \sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6 - \sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6 + \sqrt{5}}$

2)  $\sqrt{9 - \sqrt{79}} + \sqrt{9 + \sqrt{79}} = \sqrt{18 + \sqrt{8}}$  ??

On pose :  $B = \sqrt{9 - \sqrt{79}} + \sqrt{9 + \sqrt{79}}$  calculons  $B^2$  ?

$$B^2 = \left( \sqrt{9 - \sqrt{79}} \right)^2 + 2\sqrt{9 - \sqrt{79}}\sqrt{9 + \sqrt{79}} + \left( \sqrt{9 + \sqrt{79}} \right)^2$$

$$B^2 = 9 - \sqrt{79} + 2\sqrt{(9 - \sqrt{79})(9 + \sqrt{79})} + 9 + \sqrt{79}$$

$$B^2 = 18 + 2\sqrt{81 - 79} = 18 + \sqrt{8}$$

Donc :  $B^2 = 18 + \sqrt{8}$  donc :  $B = \sqrt{18 + \sqrt{8}}$  ou  $B = -\sqrt{18 + \sqrt{8}}$

Or  $B > 0$  donc :  $B = \sqrt{18 + \sqrt{8}}$

Par suite :  $\sqrt{9 - \sqrt{79}} + \sqrt{9 + \sqrt{79}} = \sqrt{18 + \sqrt{8}}$

**Exercice34:** soit  $a \geq 1$  on pose :  $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

1) montrer que :  $a(A + 1)(A - 1) = 1$

2) a) montrer que :  $2 \leq A + 1 \leq 3$

b) en déduire que :  $1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$

3) montrer que : 1,1 est une valeur approchée de

$\sqrt{1,2}$  à  $\frac{1}{30}$  près

**Solution :** 1)  $a \geq 1$  et  $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

montrons que :  $a(A + 1)(A - 1) = 1$  ?

on a :  $(A + 1)(A - 1) = A^2 - 1 = \left( \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right)^2 - 1$

$$(A + 1)(A - 1) = 1 + \frac{1}{a} - 1 = \frac{1}{a} \text{ donc : } (A + 1)(A - 1) = \frac{1}{a}$$

Donc :  $a(A + 1)(A - 1) = 1$

2) montrons que :  $2 \leq A + 1 \leq 3$  ?

on a :  $a \geq 1 > 0$  donc :  $\frac{1}{a} \geq 0$  donc :  $\frac{1}{a} + 1 \geq 1$

donc :  $A \geq 1$  donc :  $A + 1 \geq 2$  (1)

on a :  $a \geq 1$  donc :  $\frac{1}{a} \leq 1$  donc :  $1 + \frac{1}{a} \leq 2$

$$\text{donc : } A \leq \sqrt{2} \text{ donc : } A+1 \leq \sqrt{2}+1 \leq 3 \text{ (2)}$$

de (1) et (2) en déduit que :  $2 \leq A+1 \leq 3$

$$\text{et on a : } a(A+1)(A-1)=1 \text{ donc : } A-1 = \frac{1}{a(A+1)}$$

$$\text{d'autre part on a : } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{A+1} \leq \frac{1}{2} \text{ donc : } \frac{1}{3a} \leq \frac{1}{a(A+1)} \leq \frac{1}{2a}$$

$$\text{donc : } \frac{1}{3a} \leq A-1 \leq \frac{1}{2a} \text{ donc : } \frac{1}{3a}+1 \leq A \leq \frac{1}{2a}+1$$

$$3) \text{ on a } 1,2 = 1+0,2 = 1+\frac{1}{5} \text{ donc } A = \sqrt{1,2} = \sqrt{1+\frac{1}{5}}$$

Donc :  $a = 5$

$$\frac{1}{15}+1 \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{1}{10}+1 \text{ ssi } \frac{16}{15} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{11}{10}$$

$$\text{Ssi } \frac{32}{30} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{33}{30} \text{ et on a } \frac{33}{30} - \frac{32}{30} = \frac{1}{30} \left( \frac{33}{30} = 1,1 \right)$$

1,1 est une valeur approchée de  $\sqrt{1,2}$  à  $\frac{1}{30}$  près

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

*Que l'on devient un mathématicien*

