# L'ordre dans : $\mathbb{R}$

**Leçon L'ordre dans** $\mathbb{R}$
**Présentation globale** le



## I) L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

**1)Définition :** soient a et b deux réels.

$a \le b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a)\in\mathbb{R}^+$ ou $b-a\ge 0$

$b \ge a$ se lit « a supérieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a)\in\mathbb{R}^+$ ou $b-a\ge 0$

a < b se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a>0$

a > b se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a<0$

Ainsi, comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de *a* – *b*.

**Exemple1 :** comparer $\frac{101}{102}$ *et* $\frac{100}{101}$

**SOLUTION :**

$$\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{101\times101-100\times102}{101\times102}=\frac{10201-10200}{101\times102}$$

$$\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{1}{101\times102}\in\mathbb{R}^+ \text{ donc : } \frac{101}{102}\ge\frac{100}{101}$$

**Exemple2 :** comparer $a$ et $b$

$a=2+\sqrt{3}$ et $b=2\sqrt{3}$

**SOLUTION :**

$a-b=2-\sqrt{3}$ nombre positif

**cad :** $a-b\in\mathbb{R}^{*+}$ donc : $a\succ b$

**Exemple3 :** comparer $2a$ et $a^2+1$ avec $a\in\mathbb{R}$

**SOLUTION :**

$$\left(a^2+1\right)-2a=a^2-2a+1=\left(a-1\right)^2\ge 0$$

**Donc :** $a^2+1\ge 2a$ si $a\in\mathbb{R}$

**2)Activités : I) comparer les réels suivants :**

1) $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$ 2) $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$ 3) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

4) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 5) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

**II )** soient $a$ et $b$ deux réels tel que : $a\le b$

comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

**III )** soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tel que : $a\le b$ comparer : 1) $a^2$ et $b^2$ 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

3) $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

**IV )** soient $a$ et $b$ deux réels négatifs tel que : $a\le b$

comparer : $a^2$ et $b^2$

**SOLUTION :** Comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de : *a* – *b*.

1) on compare $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$

$$\frac{8}{11}-\frac{5}{11}=\frac{8-5}{11}=\frac{3}{11}\ge 0 \text{ donc } \frac{8}{11}\ge\frac{5}{11}$$

2) on compare $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$

$$\frac{13}{6}-\frac{13}{9}=\frac{39-26}{18}=\frac{13}{18}>0 \text{ donc } \frac{13}{6}>\frac{13}{9} \text{ ou } \frac{13}{6}\ge\frac{13}{9}$$

3) on compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

$$\frac{-15}{7}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{-15}{7}+\frac{15}{4}=\frac{-60+105}{28}=\frac{45}{28}>0$$

donc $\frac{-15}{7}>-\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7}\ge-\frac{15}{4}$

4) on compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$

$$\frac{-12}{7}-\frac{15}{4}=\frac{-48-105}{7}=\frac{-165}{28}<0 \text{ donc } \frac{-12}{7}<\frac{15}{4}$$

ou $\frac{-12}{7}\le\frac{15}{4}$

5) on compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

On a $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ et

$50-20=30>0$ et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs alors $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

**II )** soient $a$ et $b$ deux réels tel que : $a\leq b$

1) on compare $5a$ et $5b$

On a : $5a-5b=5(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a : $5>0$ donc $5a\leq 5b$

2) on compare $-13a$ et $-13b$

On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a : $-13<0$ donc $-13a\geq -13b$

**III )** soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tel que : $a\leq b$

1)on compare : $a^2$ et $b^2$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : $a$ et $b$ deux réels strictement positifs donc $a+b\geq 0$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

alors : $(a-b)(a+b)\leq 0$

D'où $a^2\leq b^2$

2) on compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

On a : $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

et puisque $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$ car c'est la somme de deux nombres positifs

donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq 0$ D'où $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

3) on compare : $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

On a : $a\leq b$ alors $b-a\geq 0$

et puisque $a$ et $b$ deux réels strictement positifs alors $ab>0$ car c'est la produit de deux nombres positifs

donc $\frac{b-a}{ab}\geq 0$ D'où $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$

**IV )** soient $a$ et $b$ deux réels strictement négatifs tel que : $a\leq b$

on compare : $a^2$ et $b^2$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : $a$ et $b$ deux réels négatifs donc $a+b\leq 0$

et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$ alors : $(a-b)(a+b)\geq 0$

D'où $a^2\geq b^2$

## II) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

### 1)L'ordre et l'addition

**<u>Propriété :</u>** Soient a et b et c trois nombres réels

✓ Si $a\leq b$ alors $a+c\leq b+c$ et $a-c\leq b-c$

✓ Si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$

(On peut ajouter membre a membre deux inégalités de même sens)

**<u>Remarque :</u>** on ne peut pas retrancher membre a membre deux inégalités de même sens

**<u>Exemple :</u>**

On a : $4\leq 6$ et $2\leq 6$ mais $4-2>6-6$

### 2)L'ordre et la multiplication

**<u>Propriétés :</u>**

1) $ab\geq 0$ ssi $a\geq 0$ ou $b\geq 0$ ou $a\leq 0$ ou $b\leq 0$

(le produit de deux réel de même signe et toujours positifs)

2) si $a\leq b$ et $c\geq 0$ alors $ac\leq bc$

si $a\leq b$ et $c\leq 0$ alors $ac\geq bc$

3) si $0\leq a\leq b$ et $0\leq c\leq d$ alors $ac\leq bd$

si $0\leq a\leq b$ alors $a^2\leq b^2$ et $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

4) si $a\leq b\leq 0$ alors $a^2\geq b^2$

5) si $ab>0$ on a : si $a\leq b$ alors $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$ ( Autrement dit, deux nombres strictement positifs ou strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

**Application 1:**

*Soit* $a$ est un réel strictement positif.

1. montrer que : Si $a>1$, alors $a^3>a^2>a$
2. montrer que : si $a<1$, alors $a^3<a^2<a$.

**SOLUTION :**

De l'hypothèse $a>1$, on déduit d'une part que $a^2>a$ (on multiplie les deux membres par $a>0$) et d'autre part que $a^3>a^2$ (on multiplie par $a^2>0$).

Donc $a^3>a^2>a$.

De la même façon, lorsque $0<a<1$, on démontre que : $a^3<a^2<a$.

**<u>Remarque :</u>** pour $a=0$ et $a=1$, $a=a^2=a^3$.

**Exercice 1 :** comparer $a$ et $b$ :

$a=\sqrt{6}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

**SOLUTION :**

$a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$

$a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$

on compare : $\sqrt{2}$ et $1$

On a $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{2}>1$

par suite $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$

par suite $\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ Donc

$a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ D'où $a>b$

**Exercice 2 :** soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$

1)Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2)En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

**SOLUTION : :** 1) On a $x+2 \geq x$ car $(x+2)-x \geq 0$

Donc $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve :

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} = \dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} = \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} = \frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

On a donc : $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

D'où $\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \leq \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

**Exercice 3:** soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $b \in \mathbb{R}^{*+}$

Comparer : $x = \dfrac{7a+2b}{7a}$ et $y = \dfrac{8b}{7a+2b}$

**SOLUTION :** On a $x+2 \geq x$ car $(x+2)-x \geq 0$

$$x-y = \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b}$$

$$x-y = \frac{(7a+2b)^2-7a\times 8b}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y = \frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)} = \frac{(7a)^2-2\times 7a\times 2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y = \frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^+$$

car $7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^+$ et $(7a-2b)^2 \in \mathbb{R}^+$ D'où $x \geq y$

## III)La valeur absolue et propriétés

**1)Définition :** Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit M le point d'abscisse $x$ sur un axe normé(gradué)

La valeur absolue de $x$ *est la distance* $OM$ et on note : $|x|$

et on a : $OM = |x|$ (O l'origine de l'axe)

**2)Conséquence :** $x \in \mathbb{R}$

Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$

**Exemples :** calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de valeur absolue)

1) $|-3|$ 2) $|3|$ 3) $\left|-\dfrac{3}{5}\right|$ 4) $\left|\sqrt{5}-2\right|$ 5) $\left|1-\sqrt{3}\right|$

6) $|\pi-4|$ 7) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ 8) $\left|3-2\sqrt{3}\right|$

9) $A = \left|4-2\sqrt{3}\right| - \left|5-3\sqrt{3}\right| + \left|9-5\sqrt{3}\right|$

**SOLUTION : 1)** $|-3| = -(-3) = 3$ 2) $|3| = 3$ 3) $\left|-\dfrac{3}{5}\right| = \dfrac{3}{5}$

4) $\left|\sqrt{5}-2\right|$ on compare : $\sqrt{5}$ et $2$

On a $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ et $(2)^2 = 4$ donc $\sqrt{5} > 2$ par suite

$\left(\sqrt{5}-2\right) \in \mathbb{R}^{+*}$ Donc $\left|\sqrt{5}-2\right| = \sqrt{5}-2$

5) $\left|1-\sqrt{3}\right|$ on compare : $\sqrt{3}$ et $1$

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ et $(1)^2 = 1$ donc $\sqrt{3} > 1$ par suite

$\left(1-\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R}^{-*}$ donc : $\left|1-\sqrt{3}\right| = -\left(1-\sqrt{3}\right) = -1+\sqrt{3}$

6) $|\pi-4| = -(\pi-4) = -\pi+4$ car $4 > \pi$

7) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ on compare : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{2}$

On a $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ donc $\sqrt{7} > \sqrt{2}$

par suite $\sqrt{2}-\sqrt{7} < 0$

Donc $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right| = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{7}$

8) on a $3 < 2\sqrt{3}$ car $3^2 < \left(2\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $3-2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$

Donc ; $\left|3-2\sqrt{3}\right| = -\left(3-2\sqrt{3}\right) = -3+2\sqrt{3}$

9)on a : $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ donc : $\sqrt{5}-\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$ donc : $\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

$A = \left|4-2\sqrt{3}\right| - \left|5-3\sqrt{3}\right| + \left|9-5\sqrt{3}\right|$

$A = 4-2\sqrt{3} - -\left(5-3\sqrt{3}\right) + \left(5\sqrt{3}-9\right)$

$A = 4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-9 = 0$

**Remarque :** Si $x$ est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

**3)Définition :** Soit $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et soit A et B les point d'abscisses respectives $a$ et $b$ sur un axe normé(gradué)

La distance entre $a$ et $b$ c'est la distance AB et on la note $AB=|a-b|$

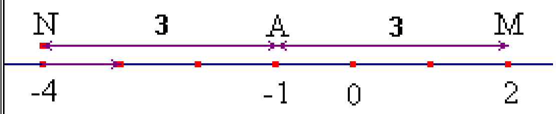
**Remarque :** $AB=BA$ donc $|a-b|=|b-a|$

**Exemples :**

$MN=|2-(-4)|=|2+4|=|6|=6$

$AM=|2-(-1)|=|3|=3$

$AN=|-1-(-4)|=|-1+4|=|3|=3$




**4)Propriétés :** $x\in\mathbb{R}$ **et** $y\in\mathbb{R}^*$ **et** $a\in\mathbb{R}^+$

$|x|\geq 0$ ; $|x^2|=|x|^2=x^2$ ; $-|x|\leq x\leq |x|$ ; $|x|=|-x|$

$\sqrt{x^2}=|x|$ ; $|xy|=|x||y|$ ; $|x+y|\leq |x|+|y|$ ; $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

$|x|=a$ équivaut à dire que $x=a$ ou $x=-a$

$|x|=|y|$ équivaut à dire que $x=y$ **ou** $x=-y$

Dire que $|x|=0$ équivaut à dire que $x=0$.

**Applications :**(*Résolution des équations)*

Résoudre les équations suivantes :

1) $|x-1|=5$ 2) $|2x+1|=|x-3|$ 3) $|x+2|=-1$

**SOLUTION : 1)** $|x-1|=5$

$|x-1|=5$ ssi $x-1=5$ ou $x-1=-5$

ssi $x=6$ ou $x=-4$ donc : $S=\{-4;6\}$

**2)** $|2x+1|=|x-3|$ ssi $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

ssi $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

ssi $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ car $|x+2|\geq 0$

**Exercice 4 :**1) calculer $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2$

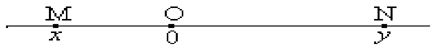
2)comparer : $3\sqrt{2}$ et $5$

3)simplifier $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

**SOLUTION : 1)**

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=43-30\sqrt{2}$




2) $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $(5)^2=25$

Donc $3\sqrt{2}>5$ donc $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}=\left|3\sqrt{2}-5\right|=-\left(3\sqrt{2}-5\right)$

car $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$ donc $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

## IV)Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

**1)définition :**

$a$ et $b$ sont deux réels tels que $a<b$.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

| L'intervalle noté … | inégalité … | Représentation de cette intervalle sur une droite graduée |
|---|---|---|
| $[a\,;\,b]$ | $a\leq x\leq b$ | $a$ [ ] $b$ |
| $]a\,;\,b[$ | $a<x<b$ | $a$ ] [ $b$ |
| $]a\,;\,b]$ | $a<x\leq b$ | $a$ ] ] $b$ |
| $[a\,;\,b[$ | $a\leq x<b$ | $a$ [ [ $b$ |
| $[a\,;\,+\infty[$ | $a\leq x$ | $a$ [ |
| $]a\,;\,+\infty[$ | $a<x$ | $a$ ] |
| $]-\infty\,;\,b]$ | $x\leq b$ | ] $b$ |
| $]-\infty\,;\,b[$ | $x>b$ | [ $b$ |

**Vocabulaire :** $[a\,;\,b]$, $]a\,;\,b[$,$]a\,;\,b]$ et $[a\,;\,b[$ sont des intervalles d'**extrémités** $a$ et $b$ ($a<b$). Le **centre** de l'intervalle est le nombre $\frac{b-a}{2}$ , et sa **longueur** est $b-a$.

**Remarques :** $-\infty$ (moins l'infini) et $+\infty$ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles.

Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi $]-\infty\,;\,+\infty[$.

$\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^-=]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^*=]-\infty,0[$

## 2)Réunion et intersection d'intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

**Exemples :** simplifier si c'est possible

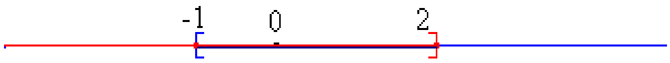
1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6]  2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6]

3) ]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[  4) ]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[

**SOLUTION :** 1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] = [4 ; 5]

2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] = [2 ; 6].


3) ]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[ = [-1 ; 2]




4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[ = ]-∞ ; +∞[

**Exercice 5 :**calculer $I\cap J$ et $I\cup J$ dans les cas suivants

$J=[-1,+\infty[$ et $I=]-3,7]$

$J=[4;10]$ et $I=]-\infty,5[$

$I=[0,10[$ et $J=[-5;-1]$

$I=\left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J=\left]-1,\frac{3}{2}\right[$

**SOLUTION :** $I\cap J=]-1,7]$ et $I\cup J=]-3;+\infty[$

$I\cap J=[4,5[$ et $I\cup J=]-\infty;10]$

$I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=[-5;10]$

$I\cap J=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I\cup J=]-1,2]$

**Exercice 6 :**représenter chaque inégalité ou encadrement par l'intervalle qui convient ; 1) $x\ge -3$ 2) $x<5$

3) $1\le 2x\le 4$ 4) $0<6x-2\le 10$ 5) $-8\le 2-2x\le 6$

**SOLUTION :** 1) $x\ge -3$ ssi $x\in[-3,+\infty[$

2) $x<5$ ssi $x\in]-\infty,5]$

3) $1\le 2x\le 4$ ssi $\frac{1}{2}\times 1\le\frac{1}{2}\times 2x\le 4\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{1}{2}\le x\le 2$

ssi $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

4) $0<6x-2\le 10$ ssi $0+2<6x-2+2\le 10+2$

ssi $2<6x\le 12$

ssi $2\times\frac{1}{2}<6x\times\frac{1}{2}\le 12\times\frac{1}{2}$ ssi $1<3x\le 6$ ssi

$1\times\frac{1}{3}<3x\times\frac{1}{3}\le 6\times\frac{1}{3}$ ssi $\frac{1}{3}<x\le 2$ ssi $x\in\left]\frac{1}{3},2\right]$

5) $-8\le 2-2x\le 6$ ssi $-8-2\le 2-2x-2\le 6-2$

ssi $-10\le -2x\le 4$

ssi $-10\times\frac{1}{2}\le -2x\times\frac{1}{2}\le 4\times\frac{1}{2}$ ssi $-5\le -x\le 2$ ssi

$-2\le x\le 5$ ssi $x\in[-2,5]$

**Exercice 7 :**résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x\ge -3\\ x\succ 2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\succ 5\\ x\le 4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x\succ 7\\ x\ge 0\end{cases}$ 3) $\begin{cases}-3\le x\le 0\\ -7\prec x\prec 10\end{cases}$

**SOLUTION :** $\{$ c'est l'intersection

1) $\begin{cases}x\ge -3\\ x\succ 2\end{cases}$

$x\ge -3$ ssi $x\in[-3,+\infty[$ et $x>2$ ssi $x\in]2,+\infty[$

$S=]2,+\infty[\cap[-3,+\infty[=]2,+\infty[$

2) $\begin{cases}x\succ 5\\ x\le 4\end{cases}$

$x\le 4$ ssi $x\in]-\infty,4]$ et $x\succ 5$ ssi $]5,+\infty[$

$S=]5,+\infty[\cap]-\infty,4]=\varnothing$

3) $x>7$ ssi $x\in]7,+\infty[$ et $x\ge 0$ ssi $x\in[0,+\infty[$

$S=]7,+\infty[\cap[0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $\begin{cases}-3\le x\le 0\\ -7\langle x\langle 10\end{cases}$

$x\in]-7;10[$ ssi $-7\langle x\langle 10$

$-3\le x\le 0$ ssi $x\in[-3;0]$

$S=]-7;10[\cap[-3;0]=[-3;0]$

**Définition :** Soient *a*, *b* et *x* trois nombres réels tq $a\le b$.

On pose $I=[a;b]$ ou $I=]a;b[$ ou $I=[a;b[$ ou $I=]a;b]$

(Intervalles ***bornés*** d'extrémités *a* et *b*.)

Le ***réel*** $\frac{a+b}{2}$ est le milieu de intervalle $I$

Le ***réel*** $b-a$ est le amplitude de intervalle $I$

Le ***réel*** $\frac{b-a}{2}$ est le rayon de intervalle $I$

**EXEMPLE :** on considéré l'intervalle $I=[-3;4]$

$\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$ est le milieu de intervalle $I$

$4-(-3)=7$ est le amplitude de intervalle $I$

$\frac{4-(-3)}{2}=\frac{7}{2}$ est le rayon de intervalle $I$

## 3)Les intervalles et la valeur absolue

**Propriété :** $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}^{+*}$

$|x|\le r$ ssi $-r\le x\le r$ ssi $x\in[-r;r]$

$|x|\ge r$ ssi $x\ge r$ ou $x\le -r$

**Applications** (*Résolution des inéquations)*

Résoudre les inéquations suivantes : $|2x+1|\prec 6$

1) $|x-1|\le 2$ 2) $|x+2|\ge 3$ 3) $|2x+1|\prec 6$

**SOLUTION :** 1) $|x-1|\le 2$ ssi $-2\le x-1\le 2$ ssi

$-2+1\le x-1+1\le 2+1$ ssi $-1\le x\le 3$ donc $S=[-1;3]$

2) $|x+2|\ge 3$ ssi $x+2\ge 3$ ou $x+2\le -3$

Ssi $x\ge 1$ ou $x\le -5$

Ssi $x\in[1;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;-5]$

Donc $S=]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$

3) $|2x+1|<6$ ssi $-6<2x+1<6$

ssi $-6-1<2x+1-1<6-1$ ssi $-7<2x<5$

ssi $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ donc : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

**Exercice 8 :** Soit $x$ et $y$ deux réels tq : $x\ge\frac{1}{2}$ et $y\le 1$ et $x-y=3$

1) Calculer : $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

2) Montrer que : $\frac{1}{2}\le x\le 4$ et $-\frac{5}{2}\le y\le 1$

3) Calculer : $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

**SOLUTION :** 1)

$E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$

On a $x\ge\frac{1}{2}$ donc $2x\ge 1$ donc $2x-1\ge 0$

Et on a $y\le 1$ donc $2y\le 2$ donc $2y-2\le 0$

donc $E=|2x-1|+|2y-2|=2x-1-(2y-2)$

donc $E=2x-2y+1=2(x-y)+1$

et on a $x-y=3$ donc $E=2\times 3+1=7$

2)on montre que $-\frac{5}{2}\le y\le 1$ ???

On a $x-y=3$ donc $x=y+3$

Et on a $x\ge\frac{1}{2}$ donc $y+3\ge\frac{1}{2}$ donc $y\ge\frac{1}{2}-3$ donc $y\ge\frac{-5}{2}$

Et on a $y\le 1$ donc $-\frac{5}{2}\le y\le 1$

on montre que $\frac{1}{2}\le x\le 4$ ????

On a $x-y=3$ donc $y=x-3$

Et On a $-\frac{5}{2}\le y\le 1$ donc $-\frac{5}{2}\le x-3\le 1$

donc $-\frac{5}{2}+3\le x-3+3\le 1+3$ D'où $\frac{1}{2}\le x\le 4$

3) $F=|x+y-5|+|x+y+2|$ ?????

On cherche le signe de : $x+y-5$

On a $-\frac{5}{2}\le y\le 1$ et $\frac{1}{2}\le x\le 4$ donc $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\le x+y\le 1+4$

donc $-2\le x+y\le 5$

donc $-2-5\le x+y-5\le 5-5$ donc $-7\le x+y-5\le 0$

donc $x+y-5\le 0$

On cherche le signe de : $x+y+2$

On a $-2\le x+y\le 5$ donc $-2+2\le x+y+2\le 5+2$

donc $0\le x+y+2\le 7$

donc $x+y+2\ge 0$

donc $F=|x+y-5|+|x+y+2|=-(x+y-5)+x+y+2$

$F=-x-y+5+x+y+2=-x-y+5+x+y+2=7$

## IV)L'encadrement et la valeur approché

### 1)Encadrement :

**Définition :** Réaliser un encadrement du réel x, c'est trouver deux nombres assez proche a et b tel que, a < x < b ou

a ≤ x ≤ b ou a <x ≤ b ou a ≤ x < b

Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude b-a

Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

a s'appelle une approximation du réel x par défaut à b-a près (ou avec la précision b-a)

b s'appelle une approximation du réel x par excès à b-a près (ou avec la précision b-a)

**Exemple :** on a $\left(\sqrt{3}\simeq 1.732050808...\right)$

Donc ① $1.73\le\sqrt{3}\le 1.74$ et ② $1.732\le\sqrt{3}\le 1.733$

① est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.74-1.73$ près

c à d à $10^{-2}=0.01$ près

② est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.733-1.732$ près

c à d à $10^{-3}=0.001$ près

Et on a $1.73$ est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par défaut à $10^{-2}$ près

$1.74$ est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par excès à $10^{-2}$ près

**Exercice 9 :** $x$ est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose

B = -2$x$ – 3.

Trouver un encadrement de B et trouer son amplitude

### 2) Encadrements et opérations

**<u>- Encadrements et additions</u>**

Considérons deux réels x et $y$ tels que :

$a$ < x < $b$ et $c$ < $y$ < $d$ alors on a a+c < x+y < b+d.

**<u>-Problème de la soustraction</u>**

Pour encadrer le résultat d'une soustraction, on commence par la remplacer par une addition

(Soustraire c'est ajouter l'opposé)

**<u>-Encadrements et multiplications</u>**

Considérons deux nombres réels **positifs** x et $y$ tels que :

$0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.
Le produit $xy$ est alors encadrée par $ac$ et $bd$.
On a $ac < xy < bd$.
Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et $y$ pour obtenir un encadrement de xy.
***Remarque :*** *Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).*

**Applications1 :** $x\in[1;3]$ **et** $y\in[2;4]$

1)Trouver un encadrement de : $x^2$ et $y^2$ et $2x$ et $3y$ et $-x$ et $-y$ et $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$

2)Trouver un encadrement de : $A=x^2+y^2+2x-3y$ et $B=\frac{2x-1}{x+1}$ et trouver les amplitudes des encadrements

**SOLUTION :** 1) $x\in[1;3]$ ssi $1\le x\le 3$ et $y\in[2;4]$ ssi $2\le y\le 4$

On a $1\le x\le 3$ donc $1^2\le x^2\le 3^2$ donc $1\le x^2\le 9$
On a $2\le y\le 4$ donc $2^2\le y^2\le 4^2$ donc $4\le y^2\le 16$
On a $1\le x\le 3$ donc $2\times 1\le 2x\le 2\times 3$ donc $2\le 2x\le 6$
On a $2\le y\le 4$ donc $3\times 2\le 3\times y\le 3\times 4$ donc $6\le 3y\le 12$
On a $1\le x\le 3$ donc $-3\le -x\le -1$
On a $2\le y\le 4$ donc $-4\le -y\le -2$
On a $1\le x\le 3$ donc $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x}\le 1$
On a $2\le y\le 4$ donc $\frac{1}{4}\le\frac{1}{y}\le\frac{1}{2}$
On a $\frac{x}{y}=x\times\frac{1}{y}$ donc $1\times\frac{1}{4}\le x\times\frac{1}{y}\le 3\times\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{4}\le\frac{x}{y}\le\frac{3}{2}$

2) encadrement de $A=x^2+y^2+2x-3y$
$6\le 3y\le 12$ donc $-12\le -3y\le -6$
On fait la somme membre a membre on trouve :
$1+4+2-12\le x^2+y^2+2x-3y\le 9+16+6-6$
Donc ① $-5\le A\le 25$ ①est un encadrement du réel $A$ à $25-(-5)=30$ près

encadrement de $B=\frac{2x-1}{x+1}$
On a $B=\frac{2x-1}{x+1}=(2x-1)\times\frac{1}{x+1}$
et on a $1\le x\le 3$ donc $2\le 2x\le 6$ donc
$2-1\le 2x-1\le 6-1$ donc $1\le 2x-1\le 5$ ❸
et on a $1\le x\le 3$ donc $2\le x+1\le 4$ donc $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{2}$ ❹
On fait la produit membre a membre de ❸ et❹ on trouve :
$1\times\frac{1}{4}\le(2x-1)\times\frac{1}{x+1}\le 5\times\frac{1}{2}$
donc $\frac{1}{4}\le B\le\frac{5}{2}$ est un encadrement du réel $B$
d'amplitudes $r=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

**Applications2 :**
1) Vérifier que $14^2<200<15^2$ et en déduire que ; $1,4<\sqrt{2}<1,5$
2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$
3) en déduire un encadrement de : $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

**SOLUTION :** 1) on a $14^2=196$ et$15^2=225$ donc $14^2<200<15^2$ donc $\sqrt{14^2}<\sqrt{200}<\sqrt{15^2}$
donc $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times 100}<\sqrt{15^2}$ donc $14<\sqrt{2}\times 10<15$
donc $14\times\frac{1}{10}<\sqrt{2}\times 10\times\frac{1}{10}<15\times\frac{1}{10}$
donc $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) on a $22^2=484$ et $23^2=529$ donc $22^2<500<23^2$
donc $\sqrt{22^2}<\sqrt{500}<\sqrt{23^2}$
donc $22<\sqrt{5}\times 10<23$ donc
$22\times\frac{1}{10}<\sqrt{5}\times 10\times\frac{1}{10}<23\times\frac{1}{10}$ donc $2,2<\sqrt{5}<2,3$

3) ) on a $1,4<\sqrt{2}<1,5$ et $2,2<\sqrt{5}<2,3$ donc
$1,4+2,2<\sqrt{2}+\sqrt{5}<1,5+2,3$
donc $3,6<\sqrt{2}+\sqrt{5}<3,8$

on a $1,4<\sqrt{2}<1,5$ et $2,2<\sqrt{5}<2,3$ donc
$1,4\times 2,2<\sqrt{2}\times\sqrt{5}<1,5\times 2,3$ donc $3,08<\sqrt{10}<3,45$

**Applications3 :** $x\in[-3;1]$ et $y\in[-6;-2]$
Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) $x^2$
4) $y^2$ 5) $x\times y$ 6) $\frac{x}{y}$

**SOLUTION :** 1) $x\in[-3;1]$ ssi $-3\le x\le 1$
$y\in[-6;-2]$ ssi $-6\le y\le -2$
donc $(-3)+(-6)\le x+y\le 1+(-2)$
donc $-9\le x+y\le -1$
2) On a $x-y=x+(-y)$ et on a $-6\le y\le -2$
donc $2\le -y\le 6$
donc $(-3)+2\le x+(-y)\le 1+6$
donc $-1\le x-y\le 7$
3) On a $-3\le x\le 1$ donc $0\le x\le 1$ ou $-3\le x\le 0$
donc $0^2\le x^2\le 1^2$ ou $0^2\le x^2\le(-3)^2$
donc $0\le x^2\le 1$ ou $0\le x^2\le 9$
donc $0\le x^2\le 9$
4) On a $-6\le y\le -2$ donc $(-2)^2\le y^2\le(-6)^2$
donc $4\le y^2\le 36$

5) encadrement de : $x\times y$

$-3\le x\le 1$ et $-6\le y\le -2$

Si $0\le x\le 1$

on a $-6\le y\le -2$ alors on a $2\le -y\le 6$

donc $0\le -xy\le 6$ donc ① $-6\le xy\le 0$

Si $-3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $2\le -y\le 6$

donc ② $0\le xy\le 18$

D'après ① et ② on déduit que : $-6\le xy\le 18$

6) encadrement de : $\frac{x}{y}$ $-3\le x\le 1$ On a

$-6\le y\le -2$ donc $-\frac{1}{2}\le \frac{1}{y}\le -\frac{1}{6}$

donc $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$

Si $0\le x\le 1$

on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$ alors $0\le x\times\left(-\frac{1}{y}\right)\le \frac{1}{2}$ donc

$0\le -\frac{x}{y}\le \frac{1}{2}$ donc ❸ $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le 0$

Si $-3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$

donc ❹ $0\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

D'après ❸ et ❹ on déduit que : $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

## 3)Valeur approchée d'un nombre.

**Définition :**

Soit a et x deux nombres et $r$ un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à $r$ près (ou à la précision $r$) lorsque $|x-a|\le r$.

**Définition :** Soit a et x deux nombres et $r$ un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à $r$ près (ou à la précision $r$), par défaut, lorsque $a\le x\le a+r$. a est une valeur approchée de x à $r$ près, par excès, lorsque : $a-r\le x\le a$.

**exemples:** 1) on a $1,38<\sqrt{2}<1,42$ donc

$1,40-0,02<\sqrt{2}<1,40+0,02$

$-0,02<\sqrt{2}-1,40<0,02$ donc $\left|\sqrt{2}-1,40\right|<0,02$

donc $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) on a $1,40\le\sqrt{2}<1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3 ) on a $1,42-0,02<\sqrt{2}<1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

## 4) Approximation décimale.

**Définition :** Soit $x\in\mathbb{R}$ et $N\in\mathbb{Z}$ et $p\in\mathbb{N}$

Si $N\times 10^{-p}\le x\le (N+1)\times 10^{-p}$ alors :

$N\times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à $10^{-p}$ près

$(N+1)\times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à $10^{-p}$ près

**Exemple :**

: on a $0,333333<\frac{1}{3}<0,333334$ donc

$333333\times 10^{-6}<\frac{1}{3}<(333333+1)\times 10^{-6}$

$333333\times 10^{-6}$ est une approximation décimale du nombre x par défaut à $10^{-6}$ près

$(333333+1)\times 10^{-6}$ est une approximation décimale du nombre x par excès à $10^{-6}$ près

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*
*Que l'on devient un mathématicien*