Tronc CS PROF : ATMANI NAJIB

L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Leçon L'ordre dans $\mathbb{R}$
Présentation globale

I) L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

1)définition :

soient a et b deux réels.

$a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

$b \geq a$ se lit « a supérieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

a < b se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a > 0$

a > b se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a < 0$

Ainsi, comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de *a* – *b*.

2)Activités :

I) comparer successivement les réels suivants :

1) $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$ 2) $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$ 3) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$ 4) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 5) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

II) soient a et b deux réels tel que : $a \leq b$

comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

III) soient a et b deux réels strictement positifs tel que : $a \leq b$

comparer : 1) a^2 et b^2 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ 3) $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

IV) soient a et b deux réels négatifs tel que : $a \leq b$

comparer : a^2 et b^2

SOLUTION : comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de *a* – *b*.

1) on compare $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$

$$\frac{8}{11} - \frac{5}{11} = \frac{8-5}{11} = \frac{3}{11} \geq 0 \text{ donc } \frac{8}{11} \geq \frac{5}{11}$$

2) on compare $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$

$\frac{13}{6}-\frac{13}{9}=\frac{39-26}{18}=\frac{13}{18}>0$ donc $\frac{13}{6}>\frac{13}{9}$ ou $\frac{13}{6}\geq\frac{13}{9}$

3) on compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

$\frac{-15}{7}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{-15}{7}+\frac{15}{4}=\frac{-60+105}{28}=\frac{45}{28}>0$ donc $\frac{-15}{7}>-\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7}\geq-\frac{15}{4}$

4) on compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$

$\frac{-12}{7}-\frac{15}{4}=\frac{-48-105}{7}=\frac{-165}{28}<0$ donc $\frac{-12}{7}<\frac{15}{4}$ ou $\frac{-12}{7}\leq\frac{15}{4}$

5) on compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

On a $\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$ et $50-20=30>0$ et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs alors $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

II) soient a et b deux réels tel que : $a\leq b$

1) on compare $5a$ et $5b$

On a : $5a-5b=5(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a : $5>0$ donc $5a\leq 5b$

2) on compare $-13a$ et $-13b$

On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

Et on a : $-13<0$ donc $-13a\geq -13b$

III) soient a et b deux réels strictement positifs tel que : $a\leq b$

1)on compare : a^2 et b^2

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : a et b deux réels strictement positifs donc $a+b\geq 0$

et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

alors : $(a-b)(a+b)\leq 0$

D'où $a^2\leq b^2$

2) on compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

On a : $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

et puisque $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq 0$ car c'est la somme de deux nombres positifs

donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq 0$

D'où $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

3) on compare : $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

On a : $a\leq b$ alors $b-a\geq 0$

et puisque a et b deux réels strictement positifs alors $ab>0$ car c'est la produit de deux nombres positifs

donc $\frac{b-a}{ab}\geq 0$

D'où $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$

IV) soient a et b deux réels strictement négatifs tel que : $a\leq b$

on compare : a^2 et b^2

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : a et b deux réels négatifs donc $a+b\leq 0$

et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$

alors : $(a-b)(a+b)\geq 0$

D'où $a^2\geq b^2$

II) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

1)L'ordre et l'addition

Propriété : Soient a et b et c trois nombres réels

- ✓ Si $a\leq b$ alors $a+c\leq b+c$ et $a-c\leq b-c$
- ✓ Si $a\leq b$ et $c\leq d$ alors $a+c\leq b+d$

(on peut ajouter membre a membre deux inégalités de même sens)

Remarque : on peut pas retrancher membre a membre deux inégalités de même sens

Exemple :

On a : $4\leq 6$ et $2\leq 6$ mais $4-2>6-6$

1)L'ordre et la multiplication

Propriétés :

1) $ab\geq 0$ ssi $a\geq 0$ ou $b\geq 0$ ou $a\leq 0$ ou $b\leq 0$

(le produit de deux réel de même signe et toujours positifs)

2) si $a\leq b$ et $c\geq 0$ alors $ac\leq bc$

si $a\leq b$ et $c\leq 0$ alors $ac\geq bc$

3) si $0\leq a\leq b$ et $0\leq c\leq d$ alors $ac\leq bd$

si $0\leq a\leq b$ alors $a^2\leq b^2$ et $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

4) si $a\leq b\leq 0$ alors $a^2\geq b^2$

5) si $ab>0$ on a : si $a\leq b$ alors $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$ (Autrement dit, deux nombres strictement positifs ou strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Application :

Soit a est un réel strictement positif.

1. montrer que : Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a$

2. montrer que : si $a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$.

Réponse : De l'hypothèse $a > 1$, on déduit d'une part que $a^2 > a$ (on multiplie les deux membres par
$a > 0$) et d'autre part que $a^3 > a^2$ (on multiplie par $a^2 > 0$). Donc $a^3 > a^2 > a$.

De la même façon, lorsque $0 < a < 1$, on démontre que $a^3 < a^2 < a$.

Remarque : pour $a = 0$ et $a = 1$, $a = a^2 = a^3$.

Exercice1 :

comparer a et b: $a=\sqrt{6}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

Réponse :

$$a-b=\sqrt{6}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)=\sqrt{3\times 2}-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)$$

$$a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$$

on compare : $\sqrt{2}$ et 1

On a $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{2}>1$ par suite $\left(\sqrt{2}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$ par suite $\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

Donc $a-b=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\in\mathbb{R}^{+*}$

D'où $a>b$

Exercice2 : soit $x\in\mathbb{R}^{*+}$

1)Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2)En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

Réponse :

1) On a $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$

Donc $\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (le conjugué)

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

Et puisque : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

On a donc : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

D'où $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\leq\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

Exercice3 : soit $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$

Comparer : $x=\frac{7a+2b}{7a}$ et $y=\frac{8b}{7a+2b}$

Réponse :

On a $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$

: $x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$

$$x-y=\frac{(7a+2b)^2-7a\times 8b}{7a(7a+2b)}=\frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y=\frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\frac{(7a)^2-2\times 7a\times 2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$x-y=\frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}\in\mathbb{R}^+$ car $7a(7a+2b)\in\mathbb{R}^+$ et $(7a-2b)^2\in\mathbb{R}^+$

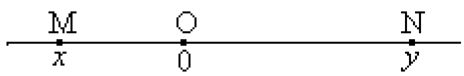
D'où $x\geq y$

III)La valeur absolue et propriétés

1)définition :

Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit M le point d'abscisse x sur un axe normé(gradué)

La valeur absolue de *x est la distance* OM et on note : $|x|$



et on a : $OM=|x|$

(O l'origine de l'axe)

2)Conséquence : $x \in \mathbb{R}$

$|x| = x \quad x \geq 0$

$|x| = -x$ si $x \leq 0$

2)Exemples :
calculer 1) $|2|$ 2) $|-3|$ 3) $|\sqrt{5}-2|$ 4) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|$ 5) $|3-\pi|$

Réponse : **1)** $|2| = 2$ **2)** $|-3| = -(-3) = 3$

3) $|\sqrt{5}-2|$ on compare : $\sqrt{5}$ et 2

On a $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ et $(2)^2 = 4$ donc $\sqrt{5} > 2$ par suite $\left(\sqrt{5}-2\right) \in \mathbb{R}^{+*}$

Donc $|\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$

4) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|$ on compare : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{2}$

On a $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ donc $\sqrt{7} > \sqrt{2}$ par suite $\sqrt{2}-\sqrt{7} < 0$

Donc $|\sqrt{2}-\sqrt{7}| = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right) = -\sqrt{2}+\sqrt{7}$

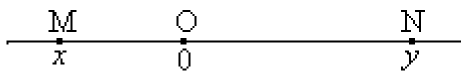
5) $|3-\pi|$ on compare : π et 3

On a $\pi > 3$ donc $3-\pi < 0$

Donc $|3-\pi| = -(3-\pi) = -3+\pi$

Remarque : Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

3)définition :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A et B les point d'abscisses respectives a et b sur un axe normé(gradué)



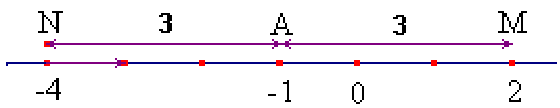
La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note $AB = |a-b|$

Remarque : $AB = BA$ donc $|a-b| = |b-a|$

Exemples :

$MN = |2-(-4)| = |2+4| = |6| = 6$

$AM = |2-(-1)| = |3| = 3$



$AN = |-1-(-4)| = |-1+4| = |3| = 3$

4) Propriétés : $x \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$

$|x| \geq 0$ et $|x^2| = |x|^2 = x^2$ et $|-x| = |x|$ et $-|x| \leq x \leq |x|$ et $\sqrt{x^2} = |x|$. $|xy| = |x||y|$ et

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ et $|x+y| \leq |x| + |y|$

$|x| = a$ Équivaut à dire que $x = a$ ou $x = -a$

$|x| = |y|$ Équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$

Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.

Applications(*Résolution des équations*)

Résoudre les équations suivantes :

1) $|x-1| = 5$ 2) $|2x+1| = |x-3|$

3) $|x+2| = -1$

Réponse : **1)** $|x-1| = 5$

$|x-1| = 5$ ssi $x-1 = 5$ ou $x-1 = -5$

ssi $x = 6$ ou $x = -4$

donc : $S = \{-4; 6\}$

2) $|2x+1| = |x-3|$

$|2x+1| = |x-3|$ ssi ou $2x+1 = -(x-3)$

ssi $2x+1 = x-3$ ou $2x+1 = -x+3$

ssi $x = -4$ ou $x = \frac{2}{3}$

donc : $S = \left\{-4; \frac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2| = -1$

$S = \varnothing$

Exercice1 : 1) calculer $\left(3\sqrt{2} - 5\right)^2$

2)comparer : $3\sqrt{2}$ et 5

3)simplifier $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$

Réponse : 1) $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}\times5+\left(5\right)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}\times5+\left(5\right)^2=43-30\sqrt{2}$

2) $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $\left(5\right)^2=25$

Donc $3\sqrt{2}>5$ donc $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}=\left|3\sqrt{2}-5\right|=-\left(3\sqrt{2}-5\right)$ car $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

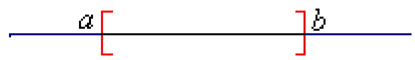
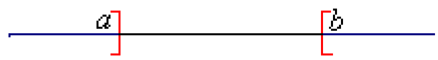
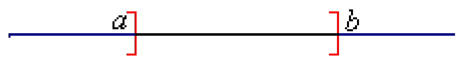
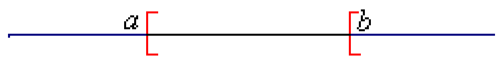
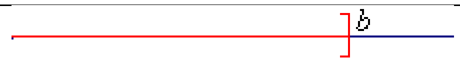
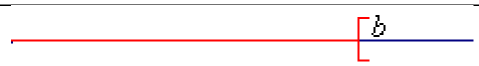
$\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

IV)Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

1)définition :

a et *b* sont deux réels tels que *a* < *b*.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté …	est l'ensemble des réels *x* tels que …	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a\,;b]$	$a\le x\le b$	
$]a\,;b[$	$a<x<b$	
$]a\,;b]$	$a<x\le b$	
$[a\,;b[$	$a\le x<b$	
$[a\,;+\infty[$	$a\le x$	
$]a\,;+\infty[$	$a<x$	
$]-\infty\,;b]$	$x\le b$	
$]-\infty\,;b[$	$x>b$	

Vocabulaire: [*a* ; *b*],]*a* ; *b*[,]*a* ; *b*] et [*a* ; *b*[sont des intervalles d'**extrémités** *a* et *b* (*a* < *b*). Le **centre** de l'intervalle est le nombre $\frac{b-a}{2}$, et sa **longueur** est *b* – *a*.

Remarques : -∞ (moins l'infini) et +∞ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles. Du côté de -∞ et de +∞, le crochet est toujours ouvert, par convention.

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi]-∞ ; +∞[.

$\mathbb{R}^{+} = [0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^{-} =]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}^{*}_{+} =]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^{*}_{-} =]-\infty,0[$

réunion et intersection d'intervalles

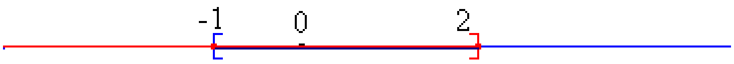
L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

Exemples :

- [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] = [4 ; 5] et [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] = [2 ; 6].

-]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[= [-1 ; 2] et]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[=]-∞ ; +∞[



Exercice1 : calculer $I \cap J$ et $I \cup J$ dans les cas suivants

$J = [-1,+\infty[$ et $I =]-3,7]$

$J = [4;10]$ et $I =]-\infty,5[$

$J = [-5;-1]$ et $I = [0,10[$

$I = \left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J = \left]-1,\frac{3}{2}\right[$

Réponse $I \cap J =]-1,7]$ et $I \cup J =]-3;+\infty[$

$I \cap J = [4,5[$ et $I \cup J =]-\infty;10]$

$I \cap J = \varnothing$ et $I \cup J = [-5;10]$

$I \cap J = \left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I \cup J =]-1,2]$

Exercice2 : représenter chaque inégalité ou encadrement par l'intervalle qui convient

$-8 \leq 2-2x \leq 6$ 5) $0 < 6x-2 \leq 10$ 4) $1 \leq 2x \leq 4$ 3) $x < 5$ 2) $x \geq -3$ 1)

Réponse :

1) $x \geq -3$ ssi $x \in [-3,+\infty[$

2) $x<5$ ssi $x\in\left]-\infty,5\right]$

3) $1\leq 2x\leq 4$ ssi $\frac{1}{2}\times 1\leq\frac{1}{2}\times 2x\leq 4\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$ ssi $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

4) $0<6x-2\leq 10$ ssi $0+2<6x-2+2\leq 10+2$ ssi $2<6x\leq 12$

ssi $2\times\frac{1}{2}<6x\times\frac{1}{2}\leq 12\times\frac{1}{2}$ ssi $1<3x\leq 6$ ssi $1\times\frac{1}{3}<3x\times\frac{1}{3}\leq 6\times\frac{1}{3}$ ssi $\frac{1}{3}<x\leq 2$

ssi $x\in\left]\frac{1}{3},2\right]$

5) $-8\leq 2-2x\leq 6$ ssi $-8-2\leq 2-2x-2\leq 6-2$ ssi $-10\leq -2x\leq 4$

ssi $-10\times\frac{1}{2}\leq -2x\times\frac{1}{2}\leq 4\times\frac{1}{2}$ ssi $-5\leq -x\leq 2$ ssi $-2\leq x\leq 5$ ssi $x\in[-2,5]$

Exercice : résoudre les systèmes suivants

$\begin{cases}-3\leq x\leq 0\\ -7\langle x\langle 10\end{cases}$)4 $\begin{cases}x\rangle 7\\ x\geq 0\end{cases}$)3 $\begin{cases}x\rangle 5\\ x\leq 4\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\geq -3\\ x\rangle 2\end{cases}$ 1)

<u>**Réponse :**</u> $\{$ c'est l'intersection

1) $\begin{cases}x\geq -3\\ x\rangle 2\end{cases}$

$x\geq -3$ ssi $x\in\left[-3,+\infty\right[$

$x>2$ ssi $x\in\left]2,+\infty\right[$

$S=\left]2,+\infty\right[\cap\left[-3,+\infty\right[=\left]2,+\infty\right[$

2) $\begin{cases}x\rangle 5\\ x\leq 4\end{cases}$

$x\leq 4$ ssi $x\in\left]-\infty,4\right]$

$S=\left]5,+\infty\right[\cap\left]-\infty,4\right]=\varnothing$

3) $x>7$ ssi $x\in\left]7,+\infty\right[$

$x\geq 0$ ssi $x\in\left[0,+\infty\right[$

$S=\left]7,+\infty\right[\cap\left[0,+\infty\right[=\left]7,+\infty\right[$

4) $\begin{cases}-3\leq x\leq 0\\ -7\langle x\langle 10\end{cases}$

$x \in]-7;10[$ ssi $-7 \langle x \langle 10$

$-3 \leq x \leq 0$ ssi $x \in [-3;0]$

$S =]-7;10[\cap [-3;0]$ = $[-3;0]$

2)milieu et amplitude et rayon d'intervalle

Définition : Soient *a, b* et *x* trois nombres réels tq $a \leq b$.

On pose $I = [a;b]$ ou $I =]a;b[$ ou $I = [a;b[$ ou $I =]a;b]$
(intervalles ***bornés*** d'extrémités *a* et *b*.)

Le ***réel*** $\frac{a+b}{2}$ est le milieu de intervalle I
Le ***réel*** $b-a$ est le amplitude de intervalle I
Le ***réel*** $\frac{b-a}{2}$ est le rayon de intervalle I

EXEMPLE : on considéré l'intervalle $I = [-3;4]$

$\frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$ est le milieu de intervalle I
$4-(-3) = 7$ est le amplitude de intervalle I
$\frac{4-(-3)}{2} = \frac{7}{2}$ est le rayon de intervalle I

3)Les intervalles et la valeur absolue

Propriété : $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$

$|x| \leq r$ ssi $-r \leq x \leq r$ ssi $x \in [-r;r]$

$|x| \geq r$ ssi $x \geq r$ ou $x \leq -r$

Applications (*Résolution des inéquations)*

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $|x-1| \leq 2$ 2) $|x+2| \geq 3$ 3) $|2x+1| < 6$

Réponse : 1) $|x-1| \leq 2$ ssi $-2 \leq x-1 \leq 2$ ssi $-2+1 \leq x-1+1 \leq 2+1$

ssi $-1 \leq x \leq 3$

donc $S = [-1;3]$

2) $|x+2| \geq 3$ ssi $x+2 \geq 3$ $x+2 \leq -3$ ou

Ssi $x \geq 1$ ou $x \leq -5$ Ssi $x \in [1;+\infty[$ ou $x \in]-\infty;-5]$

Donc $S =]-\infty;-5] \cup [1;+\infty[$

3) $|2x+1|<6$ ssi $-6<2x+1<6$ ssi $-6-1<2x+1-1<6-1$

$-7<2x<5$ ssi $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$

$S = \left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

Exercice :

Soit x et y deux reel tq : $x \geq \frac{1}{2}$ et $y \leq 1$ et $x-y=3$

1) Calculer : $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$
2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ et $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$
3) Calculer : $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

Réponse : 1)

$E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$

On a $x \geq \frac{1}{2}$ donc $2x \geq 1$ donc $2x-1 \geq 0$

Et on a $y \leq 1$ donc $2y \leq 2$ donc $2y-2 \leq 0$

donc $E=|2x-1|+|2y-2|=2x-1-(2y-2)$

donc $E=2x-2y+1=2(x-y)+1$

et on a $x-y=3$ donc $E=2\times3+1=7$

2)on montre que $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$???

On a $x-y=3$ donc $x=y+3$

Et on a $x \geq \frac{1}{2}$ donc $y+3 \geq \frac{1}{2}$ donc $y \geq \frac{1}{2}-3$ donc $y \geq \frac{-5}{2}$

Et on a $y \leq 1$ donc $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

on montre que $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$????

On a $x-y=3$ donc $y=x-3$

Et On a $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$ donc $-\frac{5}{2} \leq x-3 \leq 1$ donc $-\frac{5}{2}+3 \leq x-3+3 \leq 1+3$ D'où $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

3) $F=|x+y-5|+|x+y+2|$?????

On cherche le signe de : $x+y-5$

On a $-\frac{5}{2}\leq y\leq 1$ et $\frac{1}{2}\leq x\leq 4$ donc $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\leq x+y\leq 1+4$ donc $-2\leq x+y\leq 5$

donc $-2-5\leq x+y-5\leq 5-5$ donc $-7\leq x+y-5\leq 0$

donc $x+y-5\leq 0$

On cherche le signe de : $x+y+2$

On a $-2\leq x+y\leq 5$ donc $-2+2\leq x+y+2\leq 5+2$

donc $0\leq x+y+2\leq 7$

donc $x+y+2\geq 0$

donc $F=|x+y-5|+|x+y+2|=-(x+y-5)+x+y+2$

$F=-x-y+5+x+y+2=-x-y+5+x+y+2=7$

IV)L'encadrement et la valeur approché

Un petit mot d'introduction.

Pour connaître la valeur d'un nombre, on est souvent amené à utiliser des encadrements ou des approximations.
Dans toutes les sciences, la manipulation de valeurs exactes n'est pas indispensable. On se contente donc de calculs sur les valeurs approchées. Il est vrai qu'additionner $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ est plus contraignant et moins parlant que de faire la somme de 1,41 et 1,73 qui en sont deux valeurs approchées.
Cependant la manipulation des encadrements et des valeurs approchées requiert certaines précautions. Dans cette page, nous définirons ce qu'est un encadrement et les différents types d'approximations. Dans une autre, nous verrons comment certains encadrements peuvent découler d'autres. Ainsi que les erreurs à ne pas commettre !

1)Encadrement :

Définition :

Réaliser un encadrement du réel x , c'est trouver deux nombres assez proche a et b tel que, $a < x < b$ ou $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$

Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude b-a

Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

a s'appelle une approximation du réel x par défaut à b-a près (ou avec la précision b-a)

b s'appelle une approximation du réel x par excès à b-a près (ou avec la précision b-a)

Exemple : on a $\left(\sqrt{3} \simeq 1.732050808...\right)$

Donc ① $1.73 \leq \sqrt{3} \leq 1.74$ et ② $1.732 \leq \sqrt{3} \leq 1.733$

① est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.74-1.73$ près c à d à $10^{-2}=0.01$ près

② est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.733-1.732$ près c à d à $10^{-3}=0.001$ près

Et on a 1.73 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par défaut à 10^{-2} près

1.74 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par excès à 10^{-2} près

Exercice : x est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose $B = -2x - 3$.

Trouver un encadrement de B et trouer son amplitude

2) Encadrements et opérations

- Encadrements et additions

Considérons deux réels x et y tels que $a < x < b$ et $c < y < d$.
On a $a+c < x+y < b+d$.

-Problème de la soustraction

Pour encadrer le résultat d'une soustraction, on commence par la remplacer par une addition (soustraire c'est ajouter l'opposé)

-Encadrements et multiplications

Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que $0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.
Le produit xy est alors encadrée par ac et bd. On a $ac < xy < bd$.
Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy.

Remarque
Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).

Applications1 : $x \in [1;3]$ et $y \in [2;4]$

1)Trouver un encadrement de : x^2 et y^2 et $2x$ et $3y$ et $-x$ et $-y$ et $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$

2)Trouver un encadrement de : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ et $B = \frac{2x-1}{x+1}$ et trouver les amplitudes des encadrements

Solution : 1) $x \in [1;3]$ ssi $1 \leq x \leq 3$ et $y \in [2;4]$ ssi $2 \leq y \leq 4$

On a $1 \leq x \leq 3$ donc $1^2 \leq x^2 \leq 3^2$ donc $1 \leq x^2 \leq 9$

On a $2 \le y \le 4$ donc $2^2 \le y^2 \le 4^2$ donc $4 \le y^2 \le 16$

On a $1 \le x \le 3$ donc $2\times 1 \le 2x \le 2\times 3$ donc $2 \le 2x \le 6$

On a $2 \le y \le 4$ donc $3\times 2 \le 3\times y \le 3\times 4$ donc $6 \le 3y \le 12$

On a $1 \le x \le 3$ donc $-3 \le -x \le -1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $-4 \le -y \le -2$

On a $1 \le x \le 3$ donc $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

On a $\frac{x}{y} = x\times\frac{1}{y}$ donc $1\times\frac{1}{4} \le x\times\frac{1}{y} \le 3\times\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

2) encadrement de $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$

$6 \le 3y \le 12$ donc $-12 \le -3y \le -6$

On fait la somme membre a membre on trouve :
$1+4+2-12 \le x^2 + y^2 + 2x - 3y \le 9+16+6-6$

Donc ① $-5 \le A \le 25$ ①est un encadrement du réel A à $25-(-5)=30$ près

encadrement de $B = \frac{2x-1}{x+1}$ On a $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1)\times\frac{1}{x+1}$

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le 2x \le 6$ donc $2-1 \le 2x-1 \le 6-1$ donc $1 \le 2x-1 \le 5$ ❸

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le x+1 \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$ ❹

On fait la produit membre a membre de ❸ et❹ on trouve : $1\times\frac{1}{4} \le (2x-1)\times\frac{1}{x+1} \le 5\times\frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{4} \le B \le \frac{5}{2}$ est un encadrement du réel B d'amplitudes $r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

Applications2 :

1) Vérifier que $14^2 < 200 < 15^2$ et en déduire que ; $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$

3) en déduire un encadrement de : $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

Solution : 1) on a $14^2 = 196$ et$15^2 = 225$ donc $14^2 < 200 < 15^2$ donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times 100} < \sqrt{15^2}$ donc $14 < \sqrt{2}\times 10 < 15$ donc $14\times\frac{1}{10} < \sqrt{2}\times 10\times\frac{1}{10} < 15\times\frac{1}{10}$

donc $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) on a $22^2=484$ et $23^2=529$ donc $22^2<500<23^2$ donc $\sqrt{22^2}<\sqrt{500}<\sqrt{23^2}$

donc $22<\sqrt{5}\times 10<23$ donc $22\times\frac{1}{10}<\sqrt{5}\times 10\times\frac{1}{10}<23\times\frac{1}{10}$ donc $2,2<\sqrt{5}<2,3$

3)) on a $1,4<\sqrt{2}<1,5$ et $2,2<\sqrt{5}<2,3$ donc $1,4+2,2<\sqrt{2}+\sqrt{5}<1,5+2,3$

donc $3,6<\sqrt{2}+\sqrt{5}<3,8$

on a $1,4<\sqrt{2}<1,5$ et $2,2<\sqrt{5}<2,3$ donc $1,4\times 2,2<\sqrt{2}\times\sqrt{5}<1,5\times 2,3$ donc $3,08<\sqrt{10}<3,45$

Applications3 : $x\in[-3;1]$ et $y\in[-6;-2]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) x^2 4) y^2 5) $x\times y$ 6) $\frac{x}{y}$

Solution : 1) $x\in[-3;1]$ ssi $-3\le x\le 1$ et $y\in[-6;-2]$ ssi $-6\le y\le -2$

donc $(-3)+(-6)\le x+y\le 1+(-2)$ donc $-9\le x+y\le -1$

2) On a $x-y=x+(-y)$ et on a $-6\le y\le -2$ donc $2\le -y\le 6$

donc $(-3)+2\le x+(-y)\le 1+6$ donc $-1\le x-y\le 7$

3) On a $-3\le x\le 1$ donc $0\le x\le 1$ ou $-3\le x\le 0$

donc $0^2\le x^2\le 1^2$ ou $0^2\le x^2\le(-3)^2$

donc $0\le x^2\le 1$ ou $0\le x^2\le 9$

donc $0\le x^2\le 9$

4) On a $-6\le y\le -2$ donc $(-2)^2\le y^2\le(-6)^2$ donc $4\le y^2\le 36$

5) encadrement de : $x\times y$ $-3\le x\le 1$ et $-6\le y\le -2$

Si $0\le x\le 1$

on a $-6\le y\le -2$ alors on a $2\le -y\le 6$ donc $0\le -xy\le 6$ donc ① $-6\le xy\le 0$

Si $-3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $2\le -y\le 6$ donc ② $0\le xy\le 18$

D'après ① et ② on déduit que : $-6\le xy\le 18$

6) encadrement de : $\frac{x}{y}$ $\quad -3\le x\le 1$ $\quad$ On a $-6\le y\le -2$ donc $-\frac{1}{2}\le \frac{1}{y}\le -\frac{1}{6}$

donc $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$

Si $\quad 0\le x\le 1$

on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$ alors $0\le x\times\left(-\frac{1}{y}\right)\le \frac{1}{2}$ donc $\quad 0\le -\frac{x}{y}\le \frac{1}{2}$ donc ❸ $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le 0$

Si $\quad -3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$ donc ❹ $0\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

D'après ❸ et ❹ on déduit que : $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

3)Valeur approchée d'un nombre.

Définition:

Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque $|x-a|\le r$.

Définition:

Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r), par défaut, lorsque $a\le x\le a+r$. a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque

a-$r\le x\le a$.

exemple :

1) on a $1,38<\sqrt{2}<1,42$ donc $\quad 1,40-0,02<\sqrt{2}<1,40+0,02$

$-0,02<\sqrt{2}-1,40<0,02$ donc $\quad \left|\sqrt{2}-1,40\right|<0,02$

donc $\quad 1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) on a $1,40\le\sqrt{2}<1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3) on a $1,42-0,02<\sqrt{2}<1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

4) Approximation décimale.

Définition:

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

Si $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ alors :

$N \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près

$(N+1) \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près

exemple : on a $0,333333 < \frac{1}{3} < 0,333334$ donc $333333 \times 10^{-6} < \frac{1}{3} < (333333+1) \times 10^{-6}$

333333×10^{-6} est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1) \times 10^{-6}$ est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près