Tronc CS PROF : ATMANI NAJIB

FONCTIONS - *Généralités*

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

Chapitre n° 1

I) Définitions et Domaine de définitions.

1 Définitions
2 Exemples
3 Domaine de définitions.

Chapitre n° 2

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

1 Egalité de deux fonctions
2 Représentations graphique

Chapitre n° 3

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

1 Définitions
2 le graphe et la parité de la fonction

Chapitre n° 4

IV) Les variations d'une fonction numérique

1 Fonction croissante -décroissante -fonction constantes
2 Le taux d'accroissement d'une fonction

Chapitre n° 5

V) Les extremums d'une fonction numérique

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$

IX) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$

I) Définitions et Domaine de définitions

1°) Définitions

Définition : Une ***fonction*** est un procédé qui à un nombre *x* appartenant à un ensemble D associe un nombre y. On note : $x \overset{f}{\longmapsto} y$ ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

2°) Exemples

Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$f(x) = x^2 + 2x - 5$ où $g(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4}$. où $h(x) = \dfrac{2x-1}{5x-4}$ où $l(x) = \sqrt{x}$ où $R(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\tan x}$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonctions homographique s'écrit sous la forme : $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple 1

Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2 - 1$

1)Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par *f*.

2)Déterminer les antécédents éventuels de 2 par *f*,

Réponses : 1) $f(1) = 3\times1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et $f(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 4$

$f(-1) = 3\times(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

2) $f(x) = 2$ ssi $3\times x^2 - 1 = 2$

ssi $3\times x^2 = 2 + 1$ ssi $3\times x^2 = 3$ ssi $x^2 = 1$

ssi $x = -1$ ou $x = 1$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

Exemple 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x^2$

Compléter le tableau de valeurs suivants :

x	-2	-1	0	1	$\frac{1}{2}$	2
$f(x)$						

3°) Domaine de définitions

ACTIVITES

a. On considère la fonction définie par : $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

DEFINITION

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D f

Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. 3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$. 7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$. 11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$. 14) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$. 15) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 16) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2x+4}$.

17) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$. 18) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. 19) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

20) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$. 21) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^2-x+1$

f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / 2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\right\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\right\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x\left(x^2-2\right)=0$ ssi $x=0$ ou $x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$

ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\right\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\right\}$

$-3x+6\geq 0$ ssi $-3x\geq -6$ ssi $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ ssi $x\leq 2$

Donc $D_f=\left]-\infty;2\right]$

6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\right\}$

$2x^2-5x-3=0$ $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{7+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ et $x_2=\dfrac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq 0\right\}$ soit Δ son discriminant

$a=2$ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{4}{4}=1$ et $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 et x+1 \neq 0 \right\}$

$-9x+3=0$ ssi $-9x=-3$ ssi $x = \frac{1}{3}$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$	$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = \left]-1, \frac{1}{3}\right]$

9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0 \right\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta = b^2-4ac = (1)^2 - 4\times(-2)\times 3 = 1+24 = 25 = (5)^2 > 0$ Donc on a deux racines

$x_1 = \frac{-1+5}{2\times(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2\times(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0 \right\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0etx-1\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2etx\neq 1\}$

$D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

17) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-x\geq 0etx\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\leq 0etx\neq 0\}$

$D_f=]-\infty,0[$

18) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|2x-4|-|x-1|\neq 0\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ ssi $|2x-4|=|x-1|$

ssi $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

ssi $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x=4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\dfrac{5}{3}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{5}{3};3\right\}$

19) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\}$

$2\cos x-1=0$ ssi $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ ssi $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

20) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0etx^2-x-6\neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est Δ' = 2^2 – 4 x (-2) x 13 = 108 et ses racines sont :

$x_1=\dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6:

Le discriminant est Δ = $(-1)^2$ – 4 x (-6) x 1 =25 et ses racines sont :

$x_1'=\dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et $x_2'=\dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}=\dfrac{1+5}{2}=3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$D_f=\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

21) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$ $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

1)Egalité de deux fonctions

Définition :

Soient f et g deux fonctions, et D_f et D_g leurs domaines de définition respectifs
on dit que f et g sont égaux et on écrit f=g.
si et seulement si :
$D_f=D_g$ et pour tout $x\in D_f$ (ou $x\in D_g$) on a f(x)=g(x)

Exemple 1 : Soient les deux fonctions : $f(x)=\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x)=\frac{1+3x^2}{|x|}$

- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ et $x\neq0$

or on sait que $x^2\geq0$ donc $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
alors $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $|x|\neq 0$ ssi $x\neq 0$

donc $D_g=\mathbb{R}^*$

alors $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2}=|x|$ et $3x^2+1=1+3x^2$ donc f(x)=g(x)

donc finalement on a trouver que : $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x)

donc : f=g.

Exemple 2 : Soient les deux fonctions : $h(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

- on a $h(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_h=\mathbb{R}^*$
- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t=\mathbb{R}$

alors $D_h\neq D_t$ donc : $h\neq t$

2) Représentations graphique

Dans ce paragraphe le plan est rapporté a un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Définition : Soit f une fonction , et D_f son domaine de définition

l'ensemble des points M $(x, f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction f, souvent notée C_f .

$$C_f=\{M(x,f(x))/x\in D_f\}$$

Méthode :

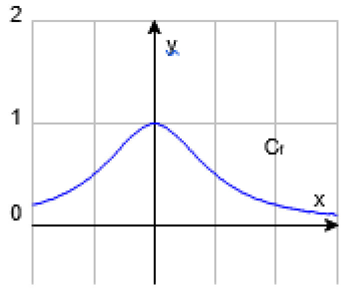
Pour tracer la courbe représentative de la fonction On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

Exemple 1 : Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

Sur I un l'intervalle $I=[-2;3]$

Réponses :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



Exemple 2 : la courbe représentative d'une fonction affine f ($f(x)=ax+b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$) est une droite d'équation $y=ax+b$

Exemple 3 : Soie f une fonction tq : $f(x)=|2x+3|$

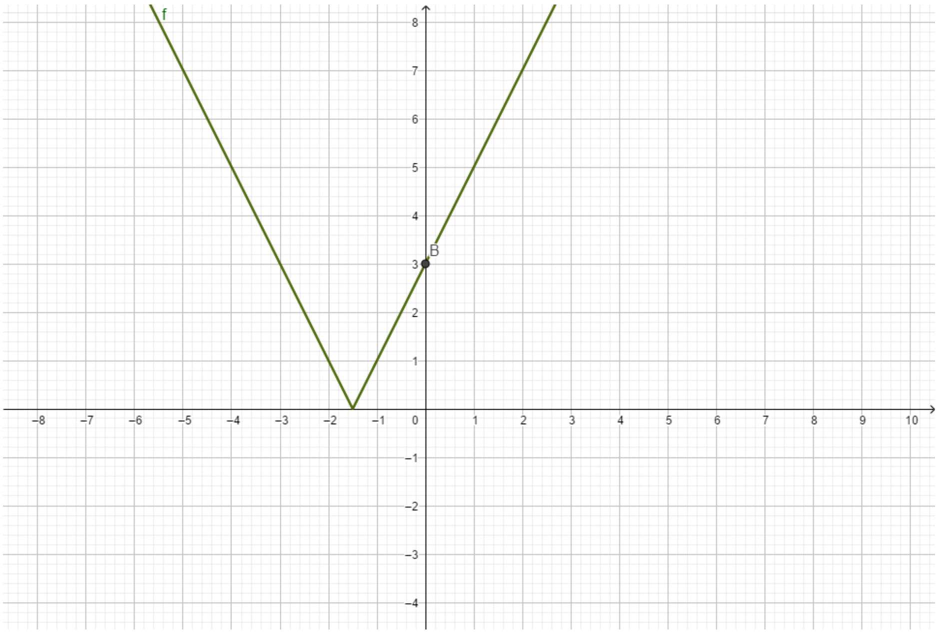
- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$2x+3=0$ ssi $x=\frac{-3}{2}$

Donc : $\begin{cases} f(x)=2x+3 \\ f(x)=-2x-3 \end{cases}$

x		$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$
$\|2x+3\|$	$-2x-3$		$2x+3$

Donc $f(x)=2x+3$ si $x\in\left[-\frac{3}{2},+\infty\right[$ et $f(x)=-2x-3$ si $x\in\left]-\infty,-\frac{3}{2}\right]$



Exemple 4: Soie f une fonction tq : $f(x)=|x-2|+|x+2|$

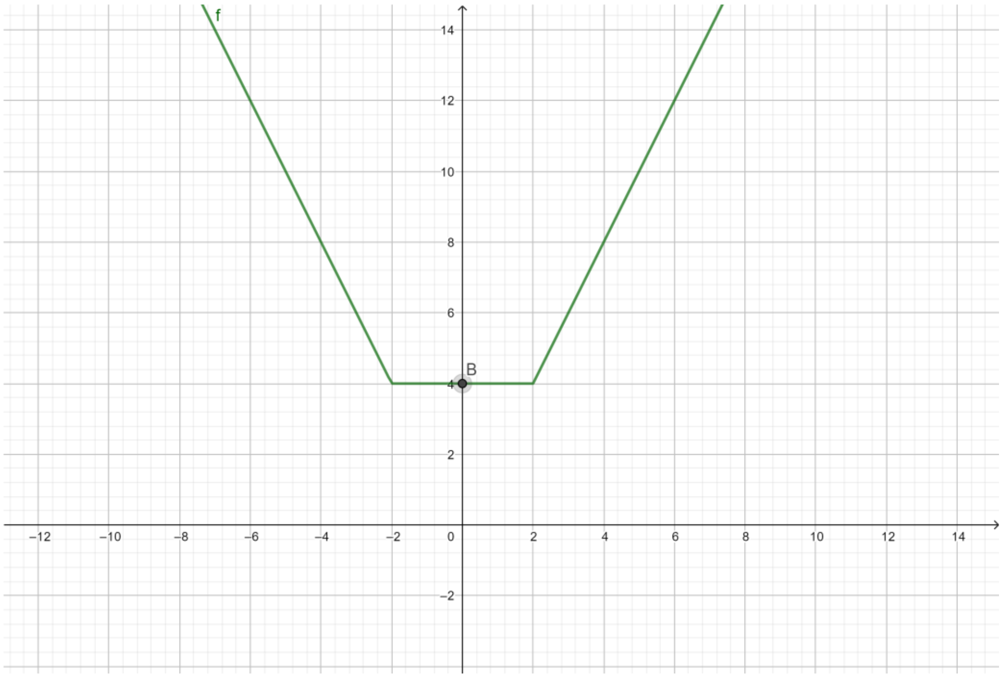
- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$x+2=0$ ssi $x=-2$

$x-2=0$ ssi $x=2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$		$x-2$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$\|x+2\|$	$-x-2$	$x+2$		$x+2$
$\|x-2\|+\|x+2\|$	$-2x$	4		$2x$

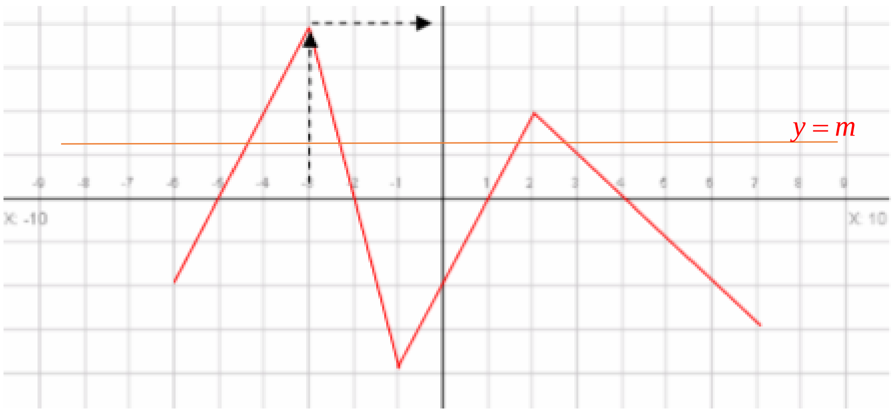
Donc $f(x)=-2x$ si $x\in\left]-\infty,-2\right]$ et $f(x)=4$ si $x\in[-2,2]$ et $f(x)=2x$ si $x\in[2,+\infty[$



Exemple 5 : La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6;7]$

Soie f une fonction Questions : Répondre par lecture graphique :

1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
3- Résoudre graphiquement $f(x)=0$
4- Quel est, en fonction de m , le nombre de solutions de $f(x)=m$
5- Résoudre graphiquement $f(x)\prec 0$
6- Résoudre graphiquement $f(x)\geq 2$



Réponses : 1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5) Image de -3 est 4

Image de 0 est -2 Image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont: -5,5 -1,75 0,5 et 5

Antécédents de 0 sont: -5 -2 1 et 4

3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{-5;-2;1;4\}$

4)Nombre de solutions de $f(x)=m$ C'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m \prec -4$: pas de solution
Si $m=-4$: une solution
Si: $-4 \prec m \prec -3$ deux solutions
Si $-3 \prec m \prec -2$: trois solutions
Si $-2 \prec m \prec 2$: quatre solutions
Si $m=2$: trois solutions
Si: $2 \prec m \prec 4$ deux solutions
Si $m=4$: une solution
Si $m \succ 4$: pas de solution

5) $f(x) \prec 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses. $S=[-6;7]\cup]-2;1[\cup]4;7]$

6) $f(x) \geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y=2$ donc $S=[-4;2.5]\cup\{2\}$

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

1. Definitions

a. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition.

On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et et seulement si :

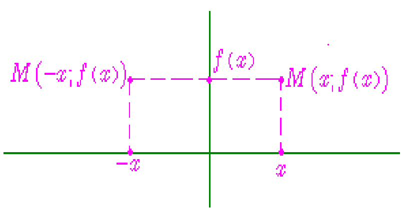
Pour tout réel x, si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$.

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$\mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{R}$-{0})	$\mathbb{R}$-{1}
$\mathbb{R}$-{-1; 1}	$\mathbb{R}$-{-1; 2}
$[-4;\ 4]$	$[-4;\ 3]$

b. Fonction paire

On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$



Remarques :

- si n est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire. (c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)
- la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

c. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

- si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,
- la fonction $x \to \tan x$ est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 1 : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$

f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$

  $f(-x) = f(x)$

  Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \dfrac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $g(-x) = \dfrac{3}{-x} = -\dfrac{3}{x}$

  $g(-x) = -g(x)$

  Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x)=2x^3+x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_h=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $h(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$

  $h(-x)=-(2x^3-x^2)\neq -h(x)$

  Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x)=\dfrac{x}{x-2}$

on a $t(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_t=\mathbb{R}-\{2\}$

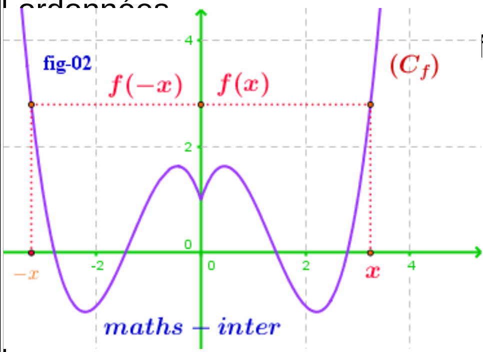
on a $-2\in D_t$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

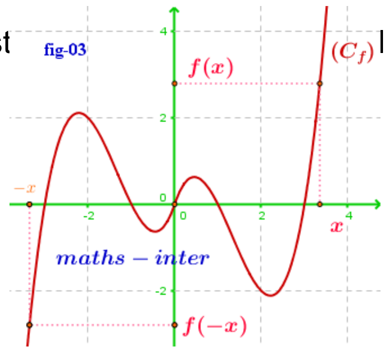
Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

2. le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées



fonction impaire est ... l'origine.



Application :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$. 3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$. 7) . 8) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Solutions

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{-x}=x^2-\frac{1}{x}=\left(-x^2+\frac{1}{x}\right)$

  $f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2-1}=\frac{|x|}{x^2-1}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\right\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\right\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ donc $2x^2+4\geq 4\geq 0$
Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ Donc $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

IV) Les variations d'une fonction numérique

1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante - fonction constantes

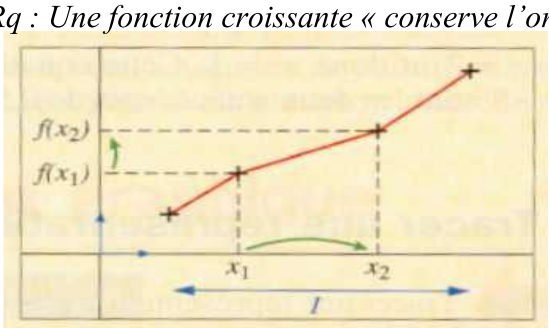
Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)\prec f(x_2)$ $\left(f(x_1)\leq f(x_2)\right)$

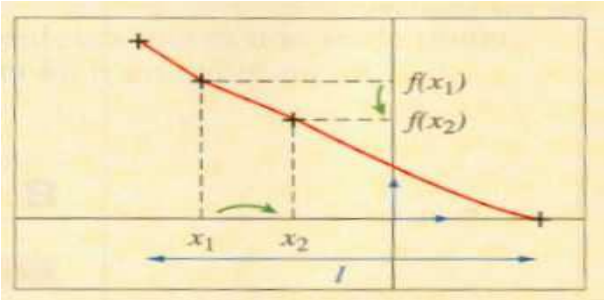
Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».



- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ $\left(f(x_1)\geq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

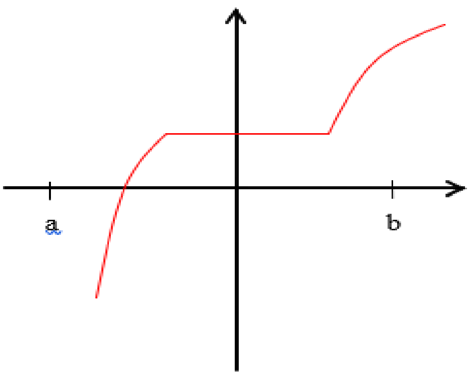


- Dire f que est constante sur I signifie que :

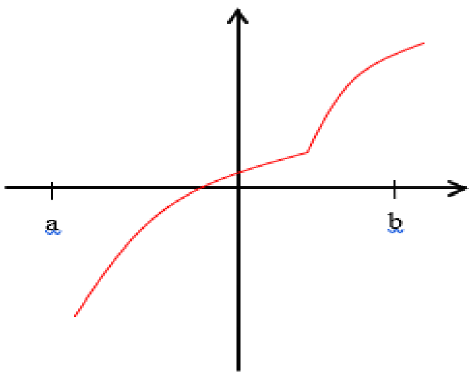
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur [a,b], mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur [a,b]

Exemple : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 7x - 5$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $7x_1 \prec 7x_2$ car $7 \succ 0$

Donc $7x_1 - 5 \prec 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

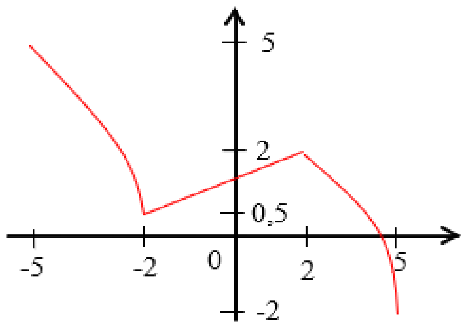
Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b)**tableau de variation :**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

3)



x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	0,5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$

pour tout $x \in I$

2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a)Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1;x_2)$ est tq : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

Exemple : Soit f une fonction tq : $f(x)=3x^2+2$

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(3x_1^2+2)-(3x_2^2+2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3x_1^2-3x_2^2+2-2}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=3(x_1+x_2)$$

b)Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_é\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\succ 0$ $\left(\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_é\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\prec 0$ $\left(\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1\in I$ et $x_é\in I$ et $x_1\neq x_2$ on a $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=0$

Exemple : 1)Soit f une fonction tq : $f(x)=3x^2+2$ $D_f=\mathbb{R}$

soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\neq x_2$ on a : $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)$

a)Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ Donc $x_1+x_2\geq 0$ Donc $3(x_1+x_2)\geq 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$ Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty;0]$

b) <u>résumé</u> : **tableau de variation :** $f(0) = 3\times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ 2 $\nearrow$

2)Soit f une fonction tq : $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x+1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$ on a : $T(x_1;x_2) = \dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a)sur $I =]-\infty;-1[$

Soit $x_1 \in]-\infty;-1[$ et $x_2 \in]-\infty;-1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \prec -1$ et $x_2 \prec -1$ Donc $x_1 + 1 \prec 0$ et $x_2 + 1 \prec 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $I =]-\infty;-1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I =]-\infty;-1[$

b)sur $J =]-1;+\infty[$

Soit $x_1 \in]-1;+\infty[$ et $x_2 \in]-1;+\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$ Donc $x_1 + 1 \succ 0$ et $x_2 + 1 \succ 0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $J =]-1;+\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J =]-1;+\infty[$

c) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

x	$-\infty$ -1 $+\infty$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

c) les variations et la parité:

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

consequences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Applications :Soit f une fonction tq : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1; x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I =]0;1]$ puis sur $J = [1;+\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $f(-x) = -x + \dfrac{1}{-x} = -x - \dfrac{1}{x} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

  $f(-x) = -f(x)$

  Donc f est une fonction impaire,

2) $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}$

$$=\frac{{x^2}_1\times x_2+x_2-{x^2}_2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2\left(x_1-x_2\right)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1\times x_2-1\right)}{x_1\times x_2}$$

$$T\left(x_1;x_2\right)=\frac{\left(x_1-x_2\right)\left(x_1\times x_2-1\right)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a)sur $I=]0;1]$

Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq 1$ et $0\prec x_2\leq 1$ $x_2+1\prec 0$ Donc $0\prec x_1x_2\leq 1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $x_1x_2-1\prec 0$ et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b)sur $J=[1;+\infty[$

Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq 1$ et $x_2\geq 1$ Donc $x_1x_2\geq 1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2\succ 1$ Donc $x_1x_2-1\succ 0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T\left(x_1;x_2\right)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I Donc f est strictement décroissante sur I'

f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

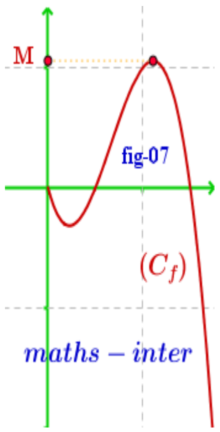
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Variations de $f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	2	$\nearrow$	

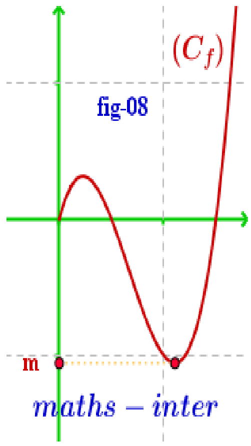
$f\left(x\right)=1+\dfrac{1}{1}=2$

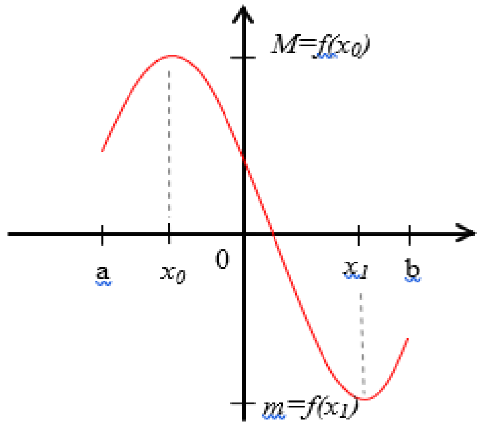
$f\left(-1\right)=-1-\dfrac{1}{1}=-2$

V) Les extremums d'une fonction numérique

1)Définitions :







Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $x \in I$: $f(x) \leq f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \geq f(a)$

2)Exemples

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = 5x^2 + 3$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ Donc $5x^2 \geq 0$ car $5 \succ 0$
Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0)$

d'où $f(0) = 3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq : $g(x) = -4x^2 + 1$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ Donc $-4x^2 \leq 0$ car $-4 \prec 0$
Par suite $-4x^2 + 1 \leq 1$ et on a $g(0) = 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \leq g(0)$

d'où $g(0) = 1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

3)Propriétés

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I = [a;b]$ (a et b dans $\mathbb{R}$) et soit $c \in I$

- Si f est croissante sur $[a;c]$ et décroissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur maximale de f sur I
- Si f est décroissante sur $[a;c]$ et croissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale de f sur I

x	a	c	b
$f(x)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

x	a	c	b
$f(x)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

Application : Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$

1°a) montrer que $f(x) = 6 - (2x-1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Reponses: 1°a) on a $D_f = \mathbb{R}$

$6 - (2x-1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$

$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$

Donc : $f(x) = 6 - (2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2 \geq 0$

Par suite $-(2x-1)^2 \leq 0$ donc $6 - (2x-1)^2 \leq 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1-1)^2 = 6$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $6 - (2x-1)^2 \leq 6$ alors $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

1° on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2$

$f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

Donc il suffit d'étudier la monotonie sur $I = [0; +\infty[$

3° soient $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 - ax_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2}$$

Donc $T(x_1; x_2) = a(x_1 + x_2)$

1iér cas : si $a \succ 0$

On a : $x_1 \in [0;+\infty[$ donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ donc $x_2 \geq 0$

Donc $x_1 + x_2 \geq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 \succ 0$

Et on a : $a \succ 0$ donc sur $[0;+\infty[$ $T(x_1;x_2) \succ 0$

Et alors f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

et puisque f est une fonction paire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

Tableau de variations de f si $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

2iér cas : si $a \prec 0$

On a : $x_1 \in]-\infty;0]$ donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ donc $x_2 \leq 0$

Donc $x_1 + x_2 \leq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 \prec 0$

Et on a : $a \prec 0$ donc sur $]-\infty;0]$ $T(x_1;x_2) \prec 0$

Et alors f est strictement décroissante croissante sur $[0;+\infty[$

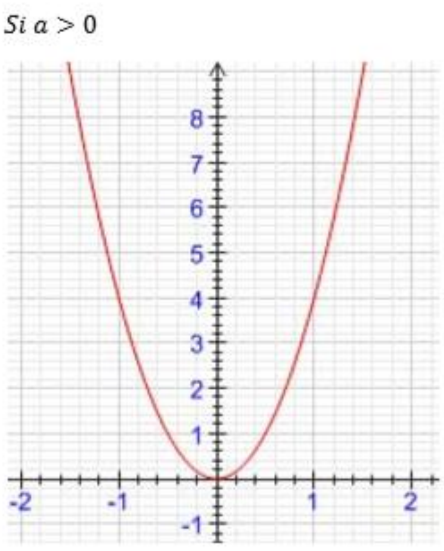
et puisque f est une fonction paire alors f est strictement croissante sur $]-\infty;0]$

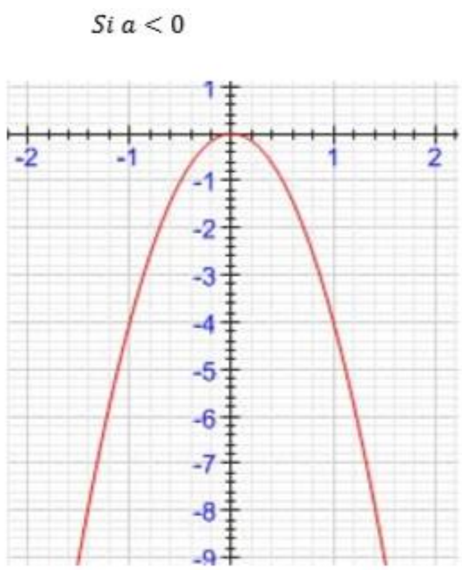
Tableau de variations de f si $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↗	0	↘ $+\infty$

4° Représentation graphique

Définition : dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repére et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées





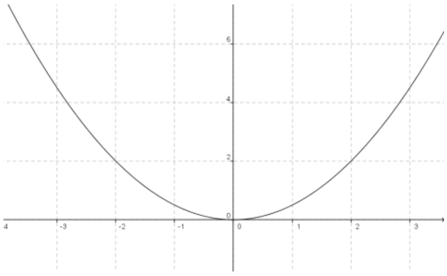
Exemples

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

On a $a=\frac{1}{2}\succ 0$ Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

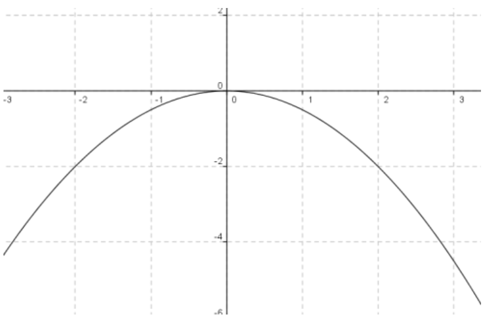


2° Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↗	0	↘ $+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2



VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x\xrightarrow{f}ax^2+bx+c$

1)Formules du changement d'origine du repére

Soit $W(\alpha;\beta)$ un point dans le Repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ et M un point du plan

$M(x;y)$ les coordonnée de M dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$

$M(X;Y)$ les coordonnée de M dans le repére $(W;\vec{i};\vec{j})$

On a $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\overrightarrow{WM}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ et $\overrightarrow{OW}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}$

$\overrightarrow{WM}=\overrightarrow{WO}+\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OW}+\overrightarrow{OM}$

Donc $X\vec{i}+Y\vec{j}=-\alpha\vec{i}-\beta\vec{j}+x\vec{i}+y\vec{j}=(x-\alpha)\vec{i}+(y-\beta)\vec{j}$

Donc $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ sont des formules du changement de l'origine de repére

2)Etude et graphe de $x\xrightarrow{f}ax^2+bx+c$

Propriétés : 1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=ax^2+bx+c$

Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

1° On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

2° Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

Avec $\Delta=b^2-4ac$ et s'appelle la forme canonique de $f(x)$

On pose $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}$

Alors $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ c a d $f(x)-\beta=a(x-\alpha)^2$

3° On a $f(x)=y$ on pose $Y=y-\beta$ et $X=x-\alpha$ et soit $W(\alpha;\beta)$ Alors :

Dans le repére $(W;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) de f est d'équation $Y=aX^2$ donc c'est une parabole de sommet W et son axe de symétrie est l'axe des ordonnées

Conséquences : 1° Dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$

2° Les variations de f

Si $a\succ 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

Si $a\prec 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Exemples 1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=2x^2-4x-2$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

On a $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{32}{4\times 2}=-4$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

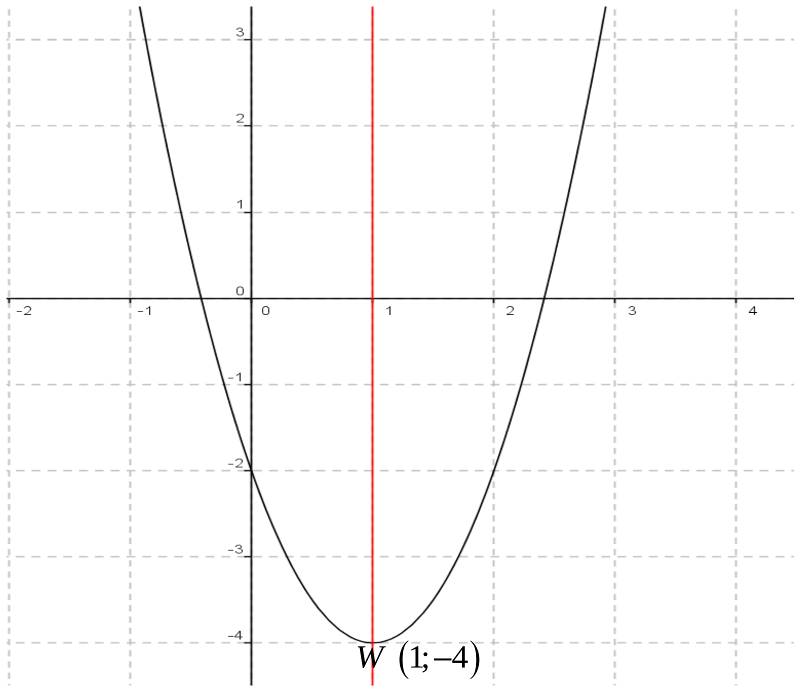
$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=2(x-1)^2-4\ \left(f(1)=2-4-2=-4\right)$

Soit $W\ (1;-4)$ Donc dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W\ (1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de f

On a $a=2\succ 0$ donc :

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ -4 $\nearrow$



2° Soit g une fonction numérique tq : $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+2}{-2}=3$

Donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

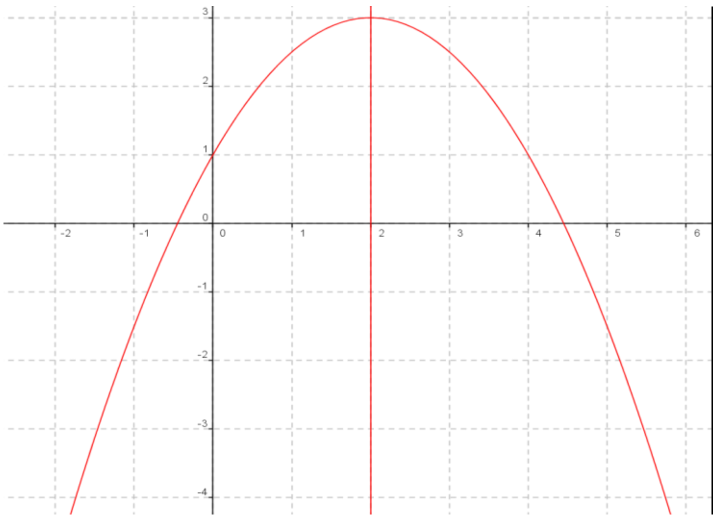
$g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3\left(g(2)=-\frac{1}{2}(2-2)+3=3\right)$

Soit $W\ (2;3)$ Donc dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W\ (2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

Tableau de variations de f

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ donc :

x	$-\infty \quad 2 \quad +\infty$
$f(x)$	$\nearrow 3 \searrow$



VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}\ (a\in\mathbb{R}^*)$

Soit f une fonction tq : $f(x)=\frac{a}{x}$

1) La parité de la fonction : On a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\frac{a}{-x}=-\frac{a}{x}$

  $f(-x)=-f(x)$

  Donc f est une fonction impaire,

2) Les variations de la fonction :soient $x_1\in\mathbb{R}^*$ et $x_2\in\mathbb{R}^*$ tq $x_1\neq x_2$ on a :

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}}{x_1-x_2}=\frac{ax_2-ax_1}{(x_1-x_2)(x_1x_2)}=\frac{-a(x_1-x_2)}{x_1x_2(x_1-x_2)}=\frac{-a}{x_1x_2}$$

a)sur $I=\mathbb{R}^{*+}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}^{*+}$ et $x_2\in\mathbb{R}^{*+}$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ 0$ et $x_2\succ 0$ Donc $x_1x_2\succ 0$ Donc $\frac{1}{x_1x_2}\succ 0$

1iér cas : si $a\succ 0$

Donc : $\frac{-a}{x_1 x_2} \prec 0$ donc sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ $T\left(x_1 ; x_2\right) \prec 0$

Et alors f est strictement décroissante sur $I = \mathbb{R}^{*+}$

et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement décroissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

<u>Tableau de variations de f si</u> $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

2iér cas : si $a \prec 0$

Donc : $\frac{-a}{x_1 x_2} \succ 0$ donc sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ $T\left(x_1 ; x_2\right) \succ 0$

Et alors f est strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^{*+}$

et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement croissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

<u>Tableau de variations de f si</u> $a \prec 0$

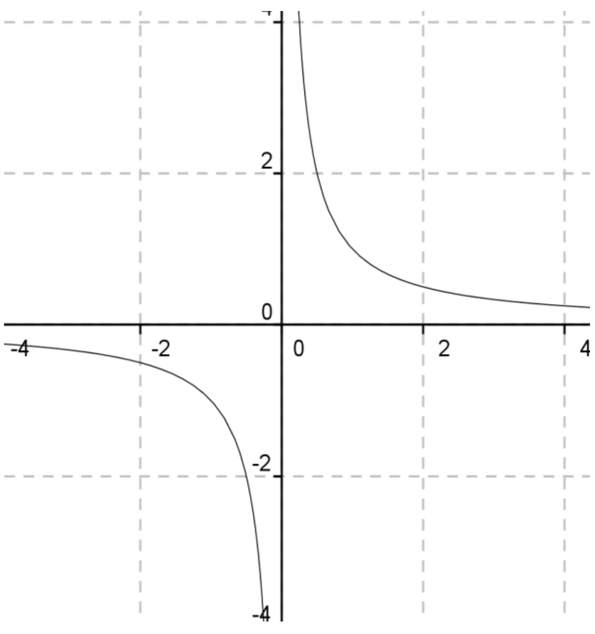
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

3) <u>Représentation graphique</u>

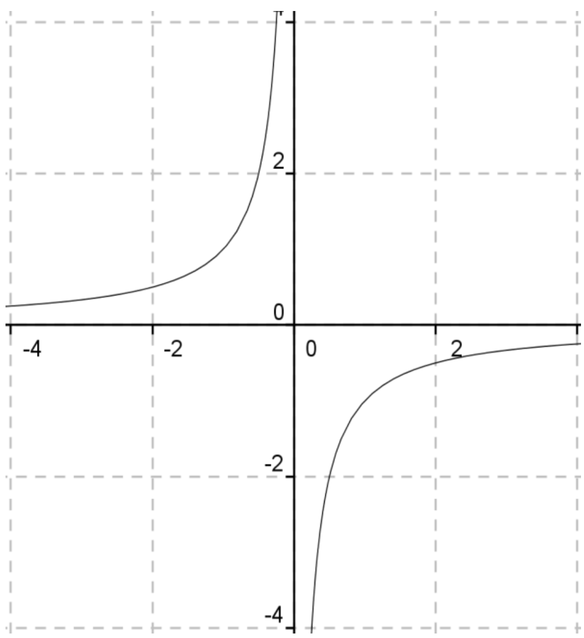
Définition : dans un Repére orthonormé $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ dont les éléments caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repére et

Ses deux asymptotes qui sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

si $a \succ 0$

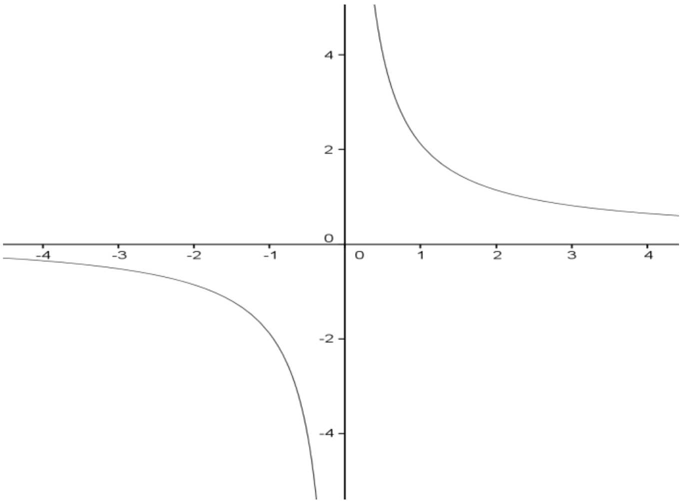


si $a \prec 0$



Exemples : Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=\frac{2}{x}$

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



IX) Etude et représentation graphique des fonctions homographique :

$x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$ $\quad a\neq 0$ et $c\neq 0$

1)Soit f une fonction tq : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $cx+d\neq 0$ ssi $x\neq -\frac{d}{c}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

2)Pour tout $x\in D_f$: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)}=\frac{a}{c}\frac{\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right)}{x+\frac{d}{c}}$

$$f(x)=\frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

On pose $\alpha=-\frac{d}{c}$ et $\beta=\frac{a}{c}$ et $\gamma=\frac{-\det f}{c^2}$ avec $\det f=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

1)Résumé et propriété : Soit f une fonction homographique tq : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

$a\neq 0$ et $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$

- Pour $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ on a $f(x)=\beta+\frac{\gamma}{x-\alpha}$ dite forme réduite de $f(x)$

Avec $\alpha=-\frac{d}{c}$ et $\beta=\frac{a}{c}$ et $\gamma=\frac{-\det f}{c^2}$ avec $\det f=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

- Soit $W\ (\alpha;\beta)$ Donc dans le repére $(W\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$ l'équation de $(C_f\ )$ est $Y\ =\frac{\gamma}{X}$ avec $Y\ =y-\beta$ et $X\ =x-\alpha$ donc $(C_f\ )$est une hyperbole de centre W et d'asymptotes l'axe des abscisse et l'axe des ordonnées
- dans le repére $(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$ $(C_f\ )$ est l'hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x\ =\alpha$ et $y\ =\beta$

Conséquences :

1iér cas : si $\det f\ =\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\succ 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ ‖	$\nearrow$

2iér cas : si $\det f\ =\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\prec 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖	$\searrow$

Exemples 1: Soit f une fonction numérique tq : $f\ (x\ )=\dfrac{-2x\ +1}{2x\ -4}$

on a $f\ (x)\in\mathbb{R}$ ssi $2x-4\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_f\ =\mathbb{R}-\{2\}$

Si $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a

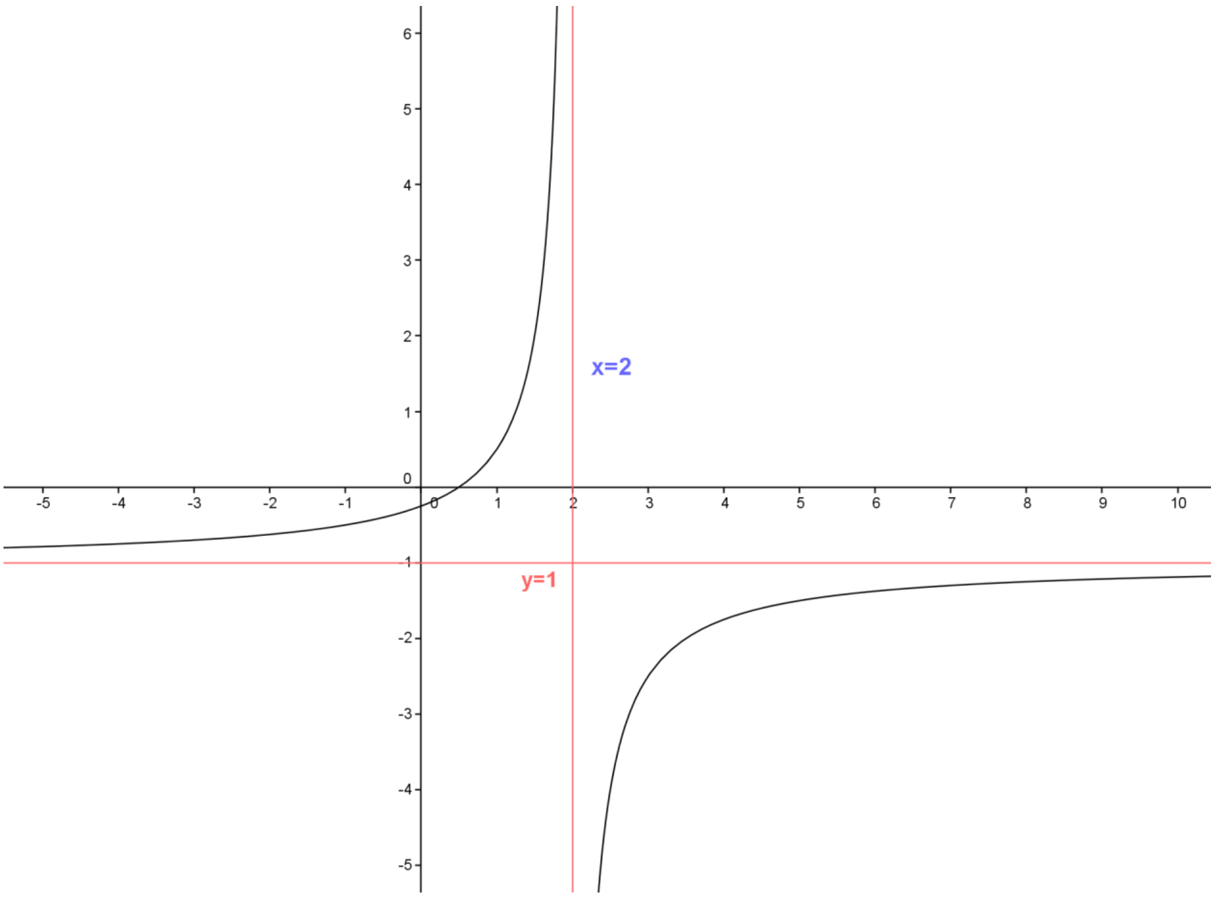
$$\begin{array}{r|l} -2x+1 & 2x-4 \\ \cline{2-2} -2x+4 & -1 \\ \cline{1-1} -3 & \end{array}$$

$$f\ (x\ )=\frac{-(2x-4)-3}{2x-4}=\frac{-(2x-4)}{2x-4}+\frac{-3}{2x-4}=-1+\frac{-3/2}{x-2}$$

$$f\ (x\ )+1=\frac{-3/2}{x-2}$$

On pose $\alpha=2$ et $\beta=-1$ et soit $W\ (2;-1)$

- Donc dans le repére $\left(W\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ l'équation de $\left(C_f\right)$ est $Y = \frac{-3/2}{X}$ avec $Y = y+1$ et $X = x-2$ donc $\left(C_f\right)$ est une hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 2$ et $y = -1$
- <u>Tableau de variations</u>



Exemples 2: Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x+2 & 2 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$f(x) - 2 = \frac{3}{x-1}$ ssi $y - 2 = \frac{3}{x-1}$

On pose $\begin{cases} x-1 = X \\ y-2 = Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y+2 \end{cases}$

$y = \frac{2x+1}{x-1}$ ssi $Y = \frac{3}{X}$

- <u>Tableau de variations de</u> $X \longrightarrow \dfrac{3}{X}\ (3 \succ 0)$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖ $\searrow$

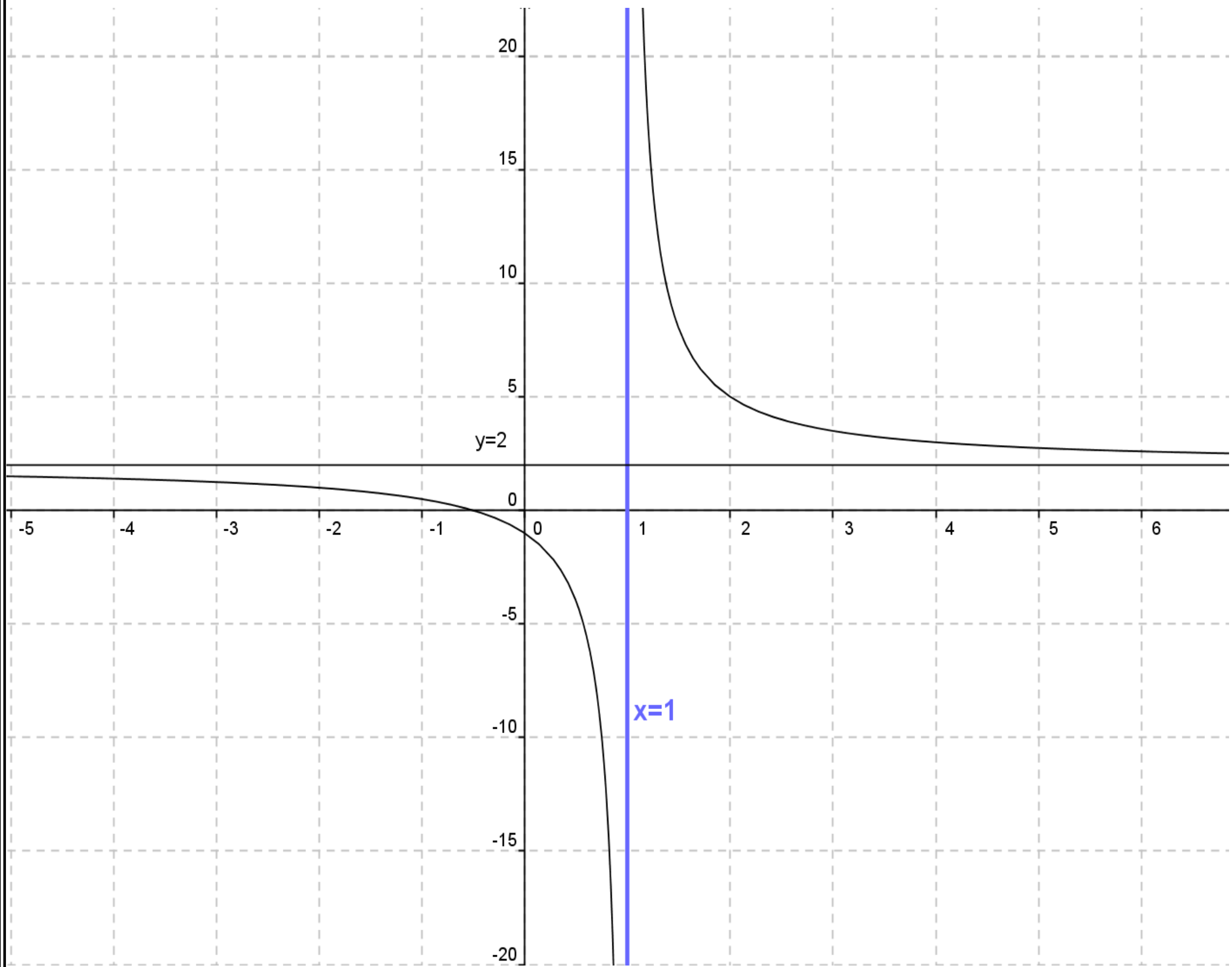
On a $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

- <u>Donc le tableau de variations de</u> $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ ‖ $\searrow$

- <u>Représentation graphique</u>

-2	**1-**	**0**	**1**	**2**	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



Exemples 3: Soit g une fonction numérique tq : $g(x)=\dfrac{-x}{x-2}$

on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

Si $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a

$$\begin{array}{r|l} -x & x-2 \\ \cline{2-2} x-2 & -1 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

$$g(x)=\frac{-x}{x-2}=\frac{-1(x-2)-2}{x-2}=\frac{-1(x-2)}{x-2}+\frac{-2}{x-2}=-1+\frac{-2}{x-2}$$

$g(x)+1=\dfrac{-2}{x-2}$ ssi $y+1=\dfrac{-2}{x-2}$

On pose $\begin{cases} x-2=X \\ y+1=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+2 \\ y=Y-1 \end{cases}$

$y=\dfrac{-x}{x-2}$ ssi $Y=\dfrac{-2}{X}$

- <u>Tableau de variations de</u> $X\longrightarrow\dfrac{-2}{X}$ $(-2\prec 0)$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	↗ ‖ ↗

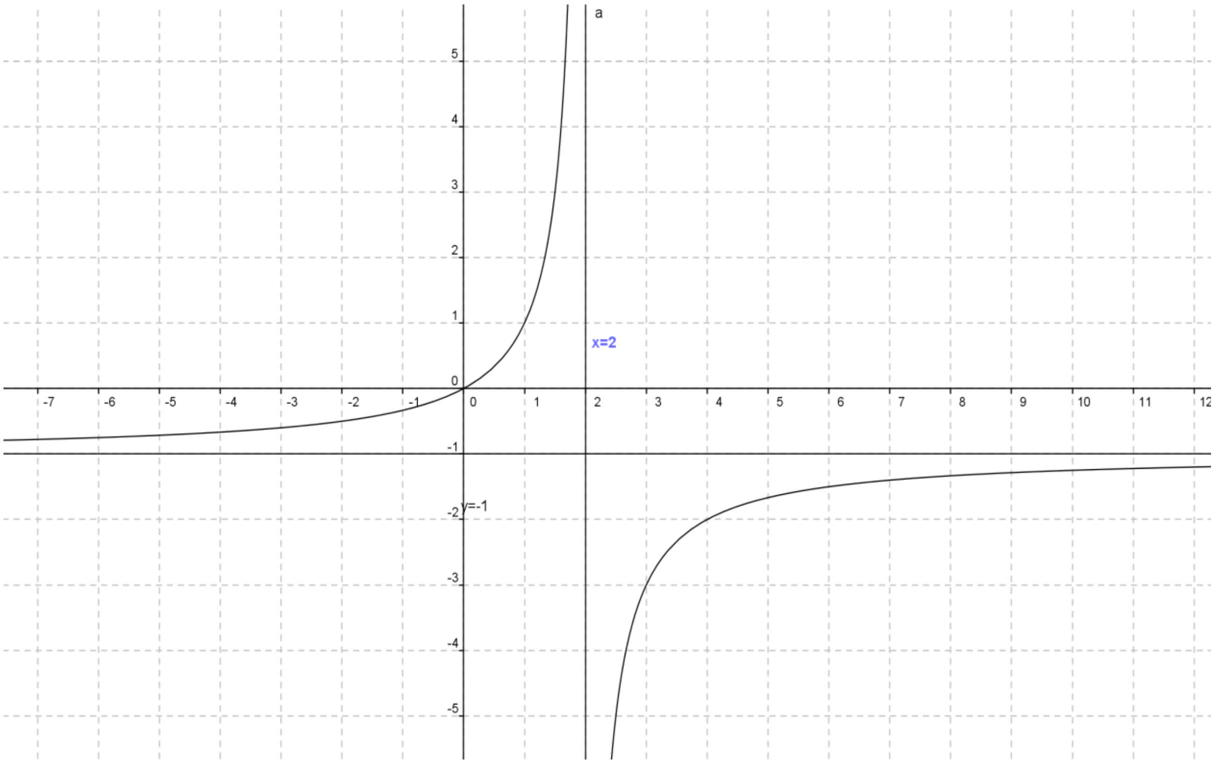
On a $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

- <u>Donc le tableau de variations de</u> $x\longrightarrow\dfrac{-x}{x-2}$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f(x)$	↗ ‖ ↗

- <u>Représentation graphique</u>

-1	0	1	2	3	4	5
-1/ 3	0	1		-3	-2	-5/ 3



X) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au- dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées `a la physique, la chimie, l'´économie, ?

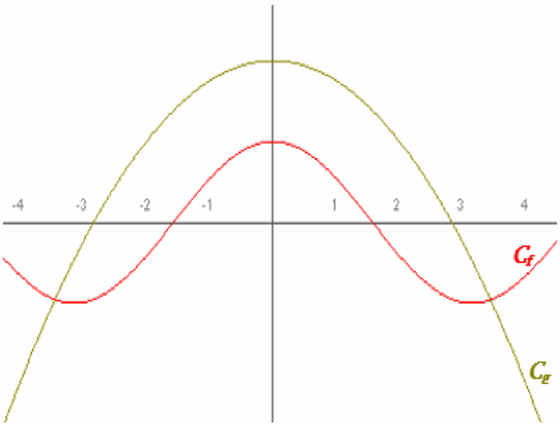
1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g.

On peut établir les relations suivantes :

$M(x;y)\in(C_f)$ ssi $y=f(x)$

$M(x;y)\in(C_g)$ ssi $y=g(x)$



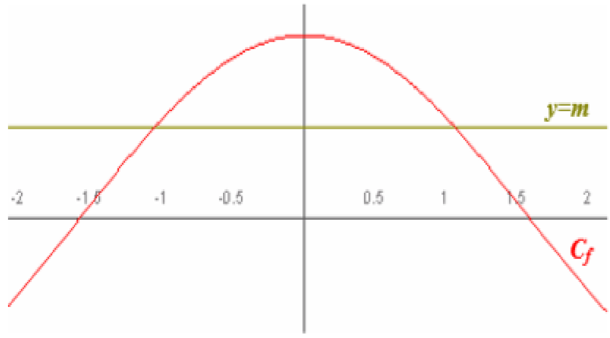
Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g), on a $M\in(C_f)$ et $M\in(C_g)$ donc soit $f(x)=g(x)$

A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x)\leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g) .

Un cas particulier : équation $f(x)=m$ et inéquation $f(x)\geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y=m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y=m$.



2) Quelques exercices d'application

Exercice1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x)=x^3-4x^2+3$ et la droite (D) d'équation $y=-x-3$

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$ puis l'inéquation $f(x)\prec 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ 0 puis l'inéquation $f(x)\geq 0$

(On donnera un encadrement d'amplitude 5×10 des solutions non entières.)

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-x-3$ puis l'inéquation $f(x)\leq -x-3$

Réponses : 1) $f(x)=3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S=\{0;4\}$

2- $f(x)=0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{a;1;b\}$ Avec $-1\prec a\prec -0.5$ et $3.5\prec b\prec 4$

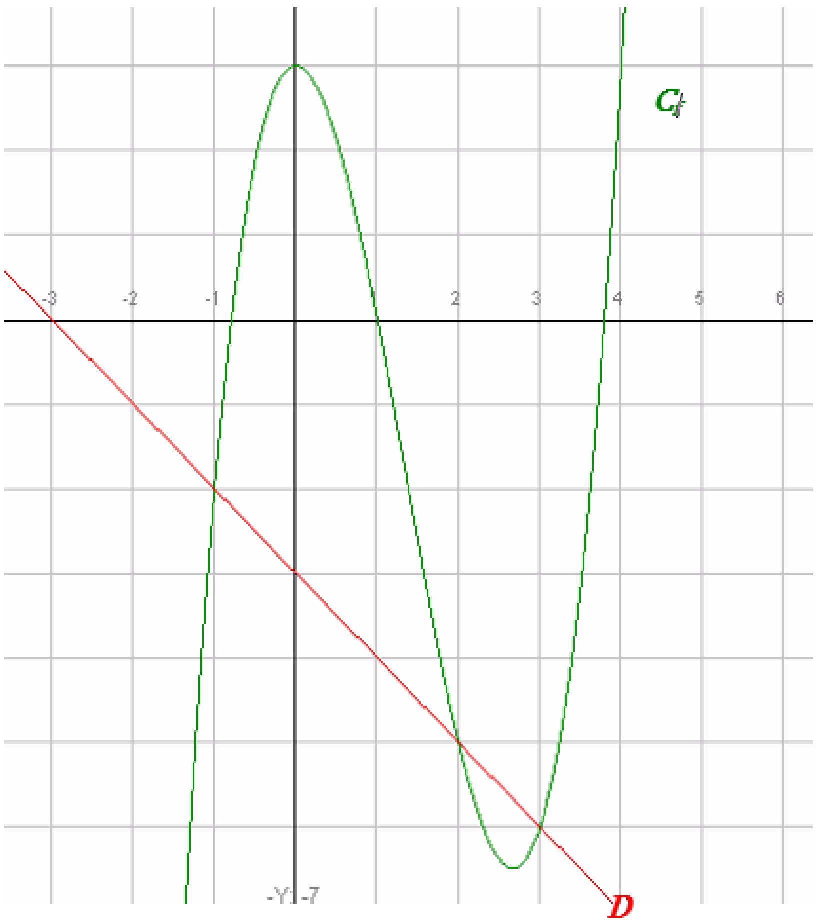
$f(x)\geq 0$

$S=[a;1]\cup[b;+\infty[$

3- $f(x)=-x-3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D : $y=-x-3$ donc $S=\{-1;2;3\}$

$f(x)\leq -x-3$

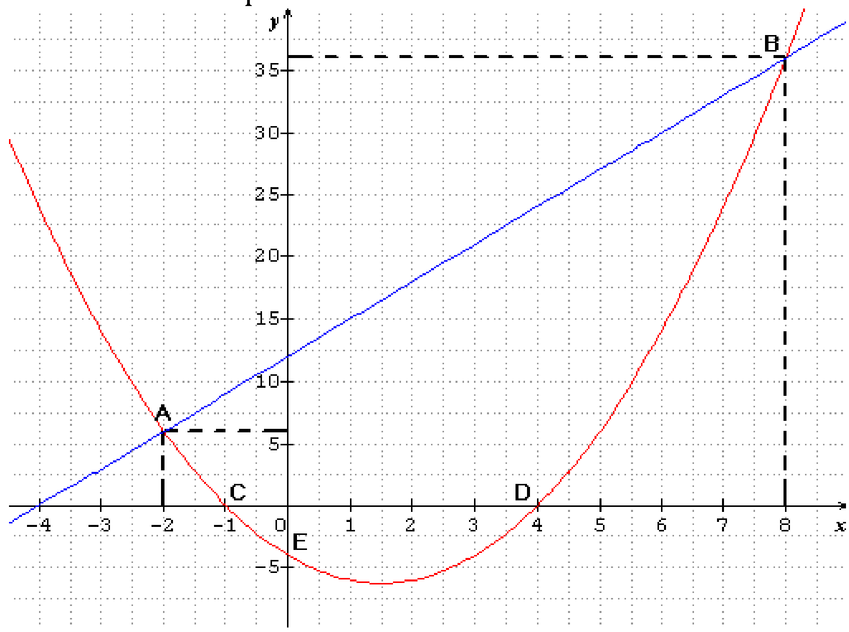
$S=]-\infty;-1]\cup[2;3]$



Exercice2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x)=x^2-3x-4$ et $g(x)=3x+12$

1) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)
2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$
3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$
4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repére

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repére ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x=-2$ et $x=8$ donc $S=\{-2;8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ ssi $x^2-3x-4=3x+12$ ssi $x^2-6x-16=0$

$a=1$ et $b=-6$ et $c=-16$

$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-16)=36+64=100=(10)^2>0$$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-6)+\sqrt{100}}{2\times1}=\dfrac{6+10}{2}=\dfrac{16}{2}=8$ et $x_2=\dfrac{-(-6)-\sqrt{100}}{2\times1}=\dfrac{6-10}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$

donc $S=\{-2;8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$

$f(x) \succ g(x)$ ssi $x^2 - 3x - 4 \succ 3x + 12$ ssi $x^2 - 6x - 16 \succ 0$

Les racines sont : $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$x^2-6x-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]-\infty;-2[\cup]8;+\infty[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l''équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0$ ssi $x^2 - 3x - 4 = 0$

$a = 1$ et $b = -3$ et $c = -4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times1\times(-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times1} = \dfrac{3+5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times1} = \dfrac{3-5}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1;0)$ et $D(4;0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

et on a $f(0) = 0^2 - 3\times0 - 4 = -4$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4;0)$