Correction : Exercices d'applications (Calcul vectoriel dans le plan)

PROF : ATMANI NAJIB **Tronc CS**

Exercice 1 : on considére les vecteurs :

$\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}$

Simplifier les vecteurs : $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Solution : $\vec{U}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

$\vec{U}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$

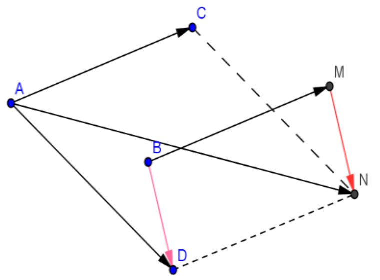
$\vec{V}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}$

$\vec{V}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EF}$

Exercice 2 : Soient A ; B; C ; D des points du plan (P)

1)construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2)comparer les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{MN}$



Solutions :1)

2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

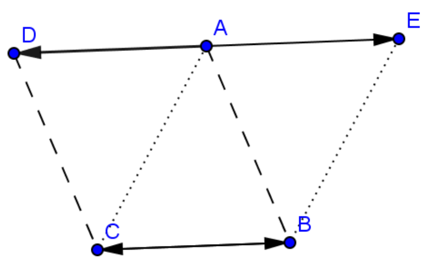
Exercice 3 : Soient A, B, C trois points du plan non alignés et on considère D et E du plan tel que :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

1)Faire un schéma

2)Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre réponse

Réponse : 1) on a : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AD}$



2) on a : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA}$

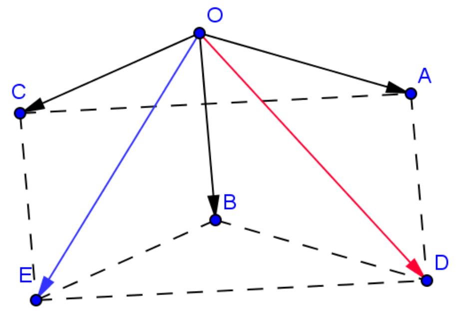
Donc le quadrilatère EACB est un parallélogramme

Exercice 4 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et A, B, C, D, O , E des points du plan tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}=\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{OE}=\vec{v}+\vec{w}$

1)Faire une figure

2)Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$

donc ① $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OB}$

Et on a :

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}$ donc

② $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OB}$

D'après ① et ② on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$

Donc : ACEB est un parallélogramme

Exercice 5 : Soit ABCD est un parallélogramme ; on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$

écrire les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Réponse : ABCD est un parallélogramme donc :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{j}-\vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{AD}=\vec{j}-\vec{i}$

on a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{BD}=\vec{j}-2\vec{i}$

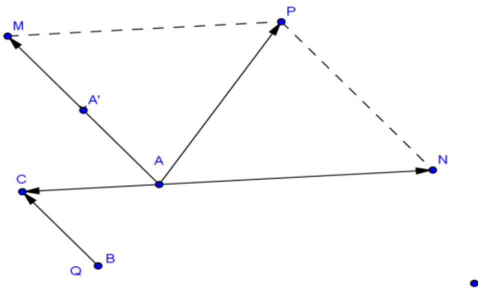
Exercice 6 : Soit A, B, C trois points du plan non alignés On considère M , N , P et Q du plan tel que :

$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}$

et $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}$

1)Faire une figure 2)En déduire que : $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$ et $B=Q$

Réponse : 1)



2) on a : $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=2\overrightarrow{BA}$

Donc $2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AP}$

Et on a : $\overrightarrow{AQ}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AP}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AQ}$

Donc $2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AQ}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}$ Donc $B=Q$

Exercice 7 : soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$ et

$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

Réponse : $\overrightarrow{W_1}=2\left(\vec{u}+\vec{v}\right)-4\left(\frac{1}{2}\vec{u}-\vec{v}\right)$

$=2\vec{u}+2\vec{v}-4\times\frac{1}{2}\vec{u}+4\vec{v}$

$\overrightarrow{W_1}=2\vec{u}+2\vec{v}-2\vec{u}+4\vec{v}=6\vec{u}+\vec{0}=6\vec{u}$

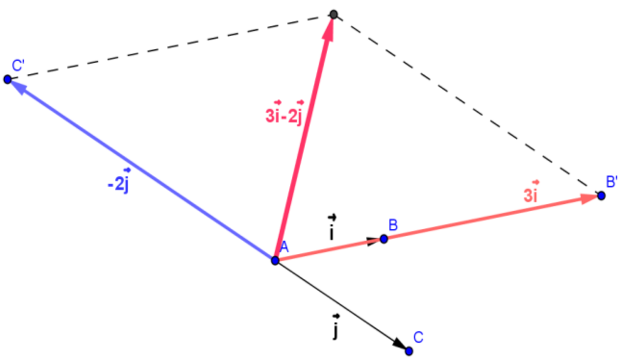
$\overrightarrow{W_2}=\frac{1}{3}\left(3\vec{u}-9\vec{v}\right)+\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+6\vec{v}\right)-2\vec{u}$

$\overrightarrow{W_2}=\vec{u}-3\vec{v}+\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{u}=2\vec{u}+\vec{0}-2\vec{u}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

Exercice 8 : Soit ABC est un triangle

on pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$ construire le vecteur $3\vec{i}-2\vec{j}$

Réponse :



Exercice 9 : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

1)Faire une figure

2)montrer que : Les points E , F et B sont alignés

Réponse : 1)

2) On a : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{CE}$

donc $\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{EC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}=4\left(\overrightarrow{EC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

Or on a : $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car : $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ donc

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ c a d $\overrightarrow{CF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Alors : $\overrightarrow{BF}=4\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}\right)$ donc $\overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{EF}$

Donc $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

D'où Les points E , F et B sont alignés

Exercice 10 : soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1)Faire une figure

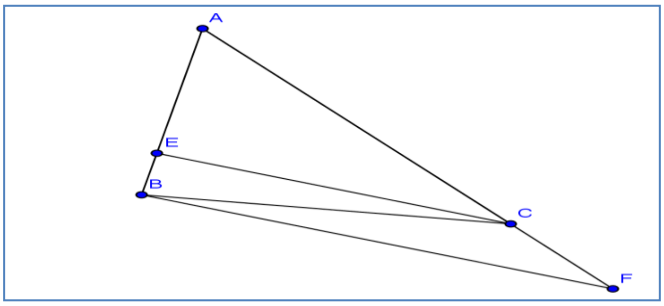
2)écrire les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) montrer que deux droites (EC) et (BF) sont parallèles

Réponse : 1)

2) on a : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$



D'où $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

et on a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ donc $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3) on a : $\overrightarrow{EC}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc

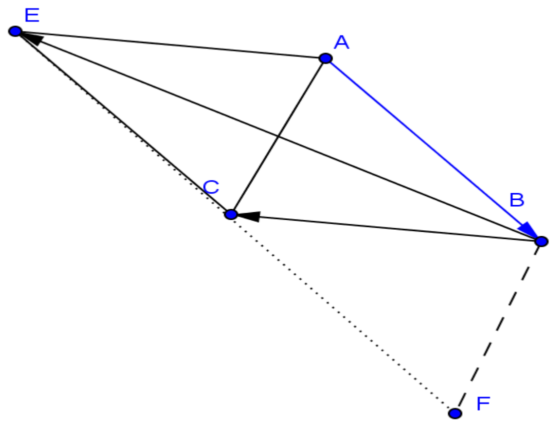
$\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$ Donc $\overrightarrow{EC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

Exercice 11 soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

1)Faire une figure

2)montrer que : C est le milieu du segment [EF]



Réponse 2) On a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ donc ① $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$

Et on a : $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc ② $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Donc : C est le milieu du segment [EF]

C’est en forgeant que l’on devient forgeron » Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l’on devient un mathématicien