

## TRIGONOMETRIE1

Leçon: TRIGONOMETRIE  
Présentation globaleI) L'ordre dans :  $\mathbb{R}$ II) L'ordre et les opérations dans  $\mathbb{R}$ 

III) La valeur absolue et propriétés

IV) Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

IV) L'encadrement et la valeur approché

**I) Le radian et le cercle trigonométrique :****1) Le radian****Définition :**Soit un cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon 1.On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.**Remarque1 :** On peut étendre cette définition à tout cercle de rayon  $R$ , en appelant radian la mesure d'un angle interceptant un arc dont la longueur est  $R$ .**Remarque2 :**

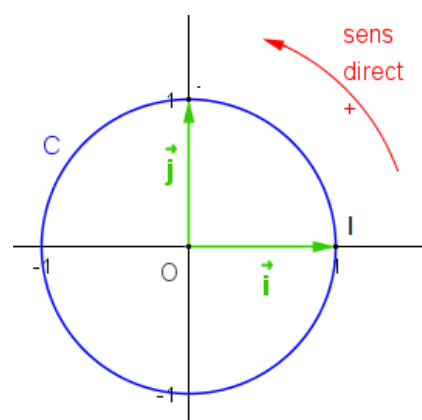
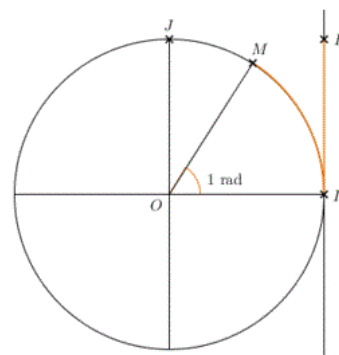
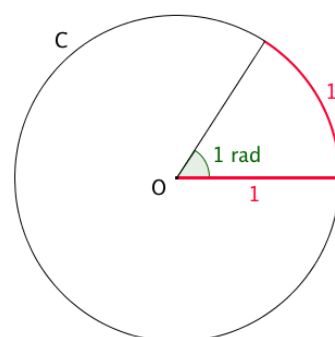
Le radian est aussi une unité de mesure permettant de mesurer la longueur des arcs sur le cercle trigonométrique

**2) Cercle trigonométrique****Définition1 :**

Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

**Définition2 :** on appelle cercle trigonométrique tout cercle centre  $O$  et de rayon 1 muni d'un point d'origine  $I$  et d'un sens de parcours appelé direct (sens contraire au sens des aiguilles d'une montre)**3) La relation entre le degré et le radian****Proposition :**

- Les mesures en radian et en degré d'un même angle sont proportionnelles
- Si  $x$  est la mesure d'un angle en radian et  $y$  sa mesure

en degré alors :  $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$ 

**Exemples :**

1) Un angle plein (tour complet) mesure  $2\pi$  radians.

En effet on a  $y = 360^\circ$

Et on a :  $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$  donc  $\frac{x}{\pi} = \frac{360}{180}$  donc  $\frac{x}{\pi} = 2$  donc  $x = 2\pi$  rad

2) on a :  $\frac{1rad}{\pi} = \frac{y}{180}$  donc  $\pi y = 180rad$  donc  $y = \frac{180}{\pi} \approx \frac{180}{3,14} \approx 57,3^\circ$

Donc :  $1rad \approx 57,3^\circ$

**3) Correspondance degrés et radians**

Ainsi, à  $2\pi$  radians (tour complet), on fait correspondre un angle de  $360^\circ$ .

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en radians $x$ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$
Mesure en degrés $y^\circ$	0	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$360^\circ$

**APPLICATION :**

1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure  $33^\circ$ .

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure  $\frac{3\pi}{8}$  rad.

$\pi$	?	$\frac{3\pi}{8}$
$180^\circ$	$33^\circ$	?

1)  $x = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{60}$

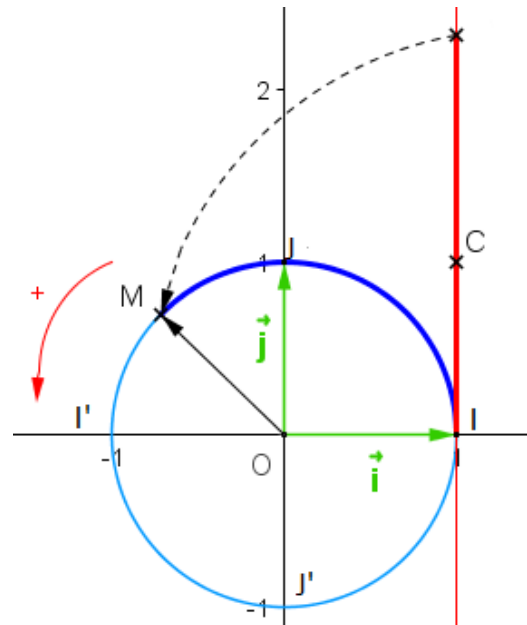
2)  $y = \frac{3\pi}{8} \times \frac{\pi}{180} = 67,5^\circ$

**II) Les abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique et l'angle orienté de deux demi- droites ( ou de deux vecteurs):**

1) Les abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique

**a) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique**

si le zéro de droite numérique coïncide avec l'origine  $I$  cercle trigonométrique ; et on enroule la demi- droite des réels positifs sur le cercle trigonométrique Dans le sens direct et on enroule la demi- droite des réels négatifs sur le cercle trigonométrique Dans le sens inverse chaque point  $M$  du cercle est ainsi recouvert par une infinité de nombres réels qui s'appellent : abscisses curvilignes de  $M$



**b) Définition :** soit  $M$  un point du cercle trigonométrique d'origine  $I$

Et soit  $\alpha$  la longueur de l'arc  $IM$  (on allant de  $I$  vers  $M$  dans le sens direct) en radian

Tout réel qui s'écrit sous la forme :  $\alpha + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  s'appelle abscisse curviligne de  $M$

**Proposition :** si  $x$  et  $x'$  deux abscisses curvilignes du même point  $M$  dans le cercle trigonométrique alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $x - x' = 2k\pi$  on écrit :  $x \equiv x' [2\pi]$

Et on lit :  $x$  est congrue à  $x'$  modulo  $2\pi$

**Exemples :**

1) si  $M = I$  alors  $II = 0$  donc les abscisses curvilignes de  $I$  sont de la forme :  $0 + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  par ex :  $0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \dots$

2) si  $M = J$  alors  $IJ = \frac{\pi}{2}$  donc les abscisses curvilignes de  $J$  sont de la forme :

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  par ex :  $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots$

3) si  $M = I'$  alors  $II' = \pi$  donc les abscisses curvilignes de  $I'$  sont de la forme :  $\pi + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  par ex :  $\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi, 5\pi, \dots$

4) si  $M = J'$  alors  $IJ' = \frac{3\pi}{2}$  donc les abscisses curvilignes de  $J'$  sont de la forme :

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  par ex :  $\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots$

5)  $\frac{49\pi}{6} = \frac{48\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 8\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4 \times 2\pi$ . Par conséquent les réels  $\frac{49\pi}{6}$  et  $\frac{\pi}{6}$  sont représentés par un même point sur le cercle trigonométrique.

**c) abscisse curviligne principale**

**Proposition et définition :**

Définition : parmi les abscisses curvilignes d'un point  $M$  du cercle trigonométrique Une seule se situe dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ .

On l'appelle abscisse curviligne principale d'un point  $M$

**Exemples :**

1) les abscisses curvilignes de  $I$  sont de la forme :  $0 + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$   
Donc 0 est l'abscisses curviligne principale de  $I$  car  $0 \in ]-\pi; \pi]$

2) pour  $J$  on a  $\frac{\pi}{2} \in ]-\pi; \pi]$  Donc  $\frac{\pi}{2}$  est l'abscisses curviligne principale de  $J$

3) de même  $J'$  on a  $\pi \in ]-\pi; \pi]$  Donc  $\pi$  est l'abscisses curviligne principale de  $I'$

4) de même  $J'$  on a  $-\frac{\pi}{2} \in ]-\pi; \pi]$  Donc  $-\frac{\pi}{2}$  est l'abscisses curviligne principale de  $J'$

**APPLICATION :**

1) Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des abscisses suivantes

$7\pi, \frac{110\pi}{3}, \frac{19\pi}{4}, -\frac{131\pi}{3}, -\frac{217\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points  $A(0)$ ;  $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ;  $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ;  $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ;  $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$   
 $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ;  $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ;  $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ;  $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ;  $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$ ;  $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

**Correction :**

- $x = 7\pi$  et soit  $\alpha$  l'abscisses curviligne principale associée a  $x$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d  $\alpha = 7\pi + 2k\pi$  et  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$

c a d  $-\pi < 7\pi + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

ssi  $\pi - 7\pi < 2k\pi \leq \pi - 7\pi$  ssi  $-8 < 2k \leq -6$  ssi  $-4 < k \leq -3$  et  $k \in \mathbb{Z}$

alors  $k = -3$  et donc  $\alpha = 7\pi + 2(-3)\pi = 7\pi - 6\pi = \pi$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = 7\pi$  est  $\alpha = \pi$

- $x = \frac{110\pi}{3}$  et soit  $\alpha$  l'abscisses curviligne principale associée a  $x$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d  $\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi$  et  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$

c a d  $-\pi < \frac{110\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

ssi  $-\pi - \frac{110\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{110\pi}{3}$  ssi  $-\frac{113\pi}{3} < 2k\pi \leq -\frac{107\pi}{3}$  ssi

$-\frac{113}{6} < k \leq -\frac{107}{6}$  et  $k \in \mathbb{Z}$  ssi  $-18.83 < k \leq -17.83$  et  $k \in \mathbb{Z}$

alors  $k = -18$  et donc  $\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi = \frac{110\pi}{3} + 2(-18)\pi = \frac{110\pi - 108\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = \frac{110\pi}{3}$  est  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

- $x = \frac{19\pi}{4}$

On a  $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$  et  $\frac{3\pi}{4} \in ]-\pi; \pi]$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $\frac{19\pi}{4}$  est  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

- $x = -\frac{131\pi}{3}$  et soit  $\alpha$  l'abscisses curviligne principale associée a  $x$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d  $\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi$  et  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$

c a d  $-\pi < -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

ssi  $-\pi + \frac{131\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi + \frac{131\pi}{3}$  ssi  $\frac{128\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{134\pi}{3}$

$$\text{ssi } \frac{128}{6} < k \leq \frac{134}{6} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ssi } 21.33 < k \leq 22.33 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{alors } k = 22 \text{ et donc } \alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{131\pi}{3} + 2(22)\pi = \frac{-131\pi + 132\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = -\frac{131\pi}{3}$  est  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$$\blacksquare x = -\frac{217\pi}{6} \text{ et soit } \alpha \text{ l'abscisses curviligne principale associée a } x$$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d  $\alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi$  et  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$

$$\text{c a d } -\pi < -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ssi } -\pi + \frac{217\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi + \frac{217\pi}{6} \quad \text{ssi } \frac{211\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{223\pi}{6}$$

$$\text{ssi } \frac{211}{12} < k \leq \frac{223}{12} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{ssi } 17.58 < k \leq 18.58 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{alors } k = 18 \text{ et donc } \alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{217\pi}{6} + 2(18)\pi = \frac{-217\pi + 216\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = -\frac{217\pi}{6}$  est  $\alpha = -\frac{\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points  $A(0)$ ;  $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ;  $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ;  $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ;  $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$M\left(\frac{7\pi}{2}\right); H\left(-\frac{\pi}{4}\right); G\left(-\frac{\pi}{2}\right); F\left(\frac{5\pi}{6}\right); I\left(\frac{2007\pi}{4}\right); N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\blacksquare x = \frac{7\pi}{2} \quad \text{On a } \frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2 \times 2\pi \text{ et } -\frac{\pi}{2} \in ]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = \frac{7\pi}{2}$  est  $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$\blacksquare x = \frac{2007\pi}{4}$$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve 501,75 on prend le nombre entier proche ex : 502

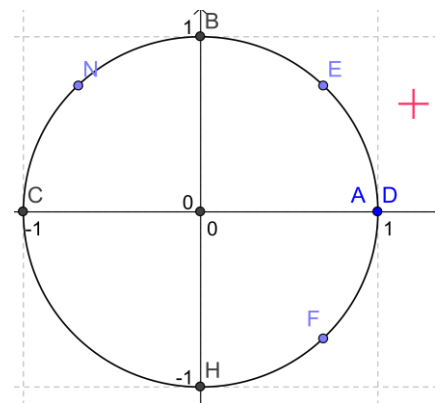
$$\text{Donc : } \frac{2007\pi}{4} - 502\pi = \frac{2007\pi}{4} - \frac{2008\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2007\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 502\pi = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 251\pi \text{ et } -\frac{\pi}{4} \in ]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$$x = \frac{2007\pi}{4} \text{ est } \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Methode2 : } -\pi < \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$$



$$-1 < \frac{2007}{4} + 2k \leq 1 \text{ ssi } -1 - \frac{2007}{4} < 2k \leq 1 - \frac{2007}{4}$$

$$\text{ssi } -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \text{ donc } -251,3 \approx -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \approx -250,3$$

$$\text{Donc } k = -251 \text{ Donc } \alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2(-251)\pi = -\frac{\pi}{4}$$

### Exercice :

1) Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des points suivants

$$M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right); M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right); M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right); M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$$

### Correction :

- $x = \frac{9\pi}{2}$

$$\text{Methode1: } \frac{9\pi}{2} = \frac{8\pi + \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2} \in ]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_0$  est  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Methode2: } -\pi < \frac{9\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } -1 < \frac{9}{2} + 2k \leq 1 \text{ Donc } -1 - \frac{9}{2} < -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 2k \leq 1 - \frac{9}{2}$$

$$\text{Donc } -\frac{11}{2} < 2k \leq -\frac{7}{2} \text{ Donc } -\frac{11}{4} < k \leq -\frac{7}{4}$$

$$\text{Donc } -2,7 \approx -\frac{11}{4} < k \leq -\frac{7}{4} \approx -1,7 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = -2 \text{ Donc } \alpha = \frac{9\pi}{2} + 2(-2)\pi = \frac{9\pi}{2} - 4\pi = \frac{9\pi - 8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_0$  est  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

- $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

$$\text{Methode1: On a } \frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi \text{ et } -\frac{\pi}{3} \in ]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_1$  est  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

$$\text{Methode2: } -\pi < \frac{11\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } -1 < \frac{11}{3} + 2k \leq 1 \text{ Donc } -1 - \frac{11}{3} < -\frac{11}{3} + \frac{11}{3} + 2k \leq 1 - \frac{11}{3}$$

$$\text{Donc } -\frac{14}{3} < 2k \leq -\frac{8}{3} \text{ Donc } -\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3}$$

Donc  $-2,3 \approx -\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3} \approx -1,3$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k = -2$  Donc  $\alpha = \frac{11\pi}{3} + 2(-2)\pi = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi - 12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_1$  est  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

▪  $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a  $\frac{67\pi}{4} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4} \in ]-\pi; \pi]$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_2$  est  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Methode2:  $-\pi < \frac{67\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $-1 < \frac{67}{4} + 2k \leq 1$  Donc  $-1 - \frac{67}{4} < -\frac{67}{4} + \frac{67}{4} + 2k \leq 1 - \frac{67}{4}$

Donc  $-\frac{71}{4} < 2k \leq -\frac{63}{4}$  Donc  $-8,8 \approx -\frac{71}{8} < k \leq -\frac{63}{8} \approx -7,8$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k = -8$  Donc  $\alpha = \frac{67\pi}{4} + 2(-8)\pi = \frac{67\pi}{4} - 16\pi = \frac{67\pi - 64\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_2$  est  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

▪  $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

On a  $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \times 3\pi + \frac{\pi}{3}$  et  $\frac{\pi}{3} \in ]-\pi; \pi]$

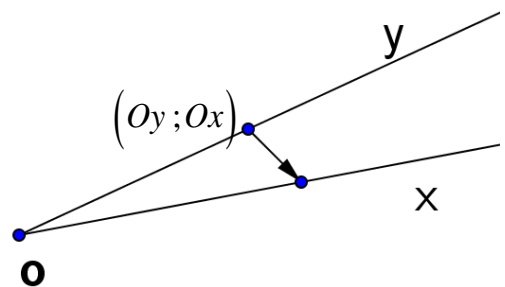
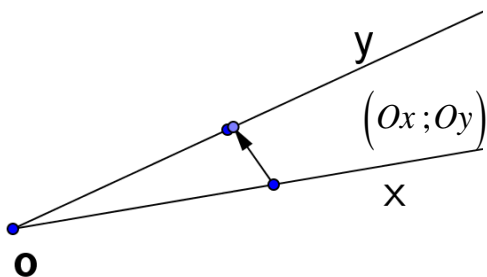
donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_3$  est  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

### 3) L'angle orienté de deux demi-droites

▪ **Définition :** Soit  $[Ox)$  et  $[Oy)$  deux demi-droites ayant même origine  $O$

Le couple  $([Ox); [Oy))$  constitué des demi-droites  $[Ox)$  et  $[Oy)$  (dans cet ordre)

détermine un angle orienté qu'on le note :  $([Ox); [Oy))$

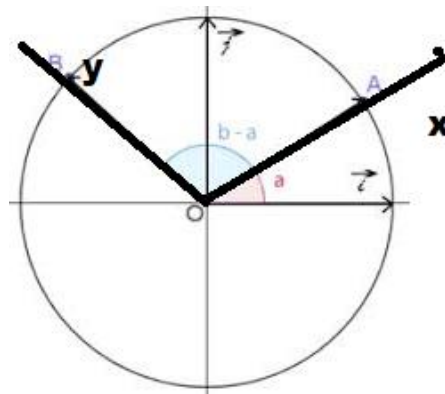


**Remarque :** Le couple  $([Oy];[Ox])$  constitué des demi-droites  $[Oy]$  et  $[Ox]$  (dans cet ordre) détermine un angle orienté qu'on le note :  $([Oy];[Ox])$

▪ **Mesures de l'angle orienté de deux demi-droites**

Soit  $[Ox]$  et  $[Oy]$  deux demi-droites d'origine O et soit (C) le cercle trigonométrique de cercle O

Soit A et B les points d'intersections de (C) avec les demi-droites  $[Ox]$  et  $[Oy]$  respectivement si a et b sont deux abscisses curvilignes respectives de A et B .



**Définitions :**

✓ On appelle mesure de l'angle orienté  $(Ox;Oy)$  tout réel qui s'écrit sous la forme :

$b-a+2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et on le note :

$$\overline{(Ox;Oy)} = b - a + 2k\pi$$

✓ Parmi Toute les mesures de  $(Ox;Oy)$

Une seule se situe dans l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$  .et elle s'appelle abscisse curviligne principale de l'angle  $(Ox;Oy)$

**Cas particuliers :**

1) L'angle orienté nul :

$$\overline{(Ox;Ox)} = 0 + 2k\pi \text{ ou } \overline{(Ox;Ox)} \equiv 0[2\pi]$$

2) L'angle orienté plat :  $[Ox]$  et  $[Oy]$  opposées

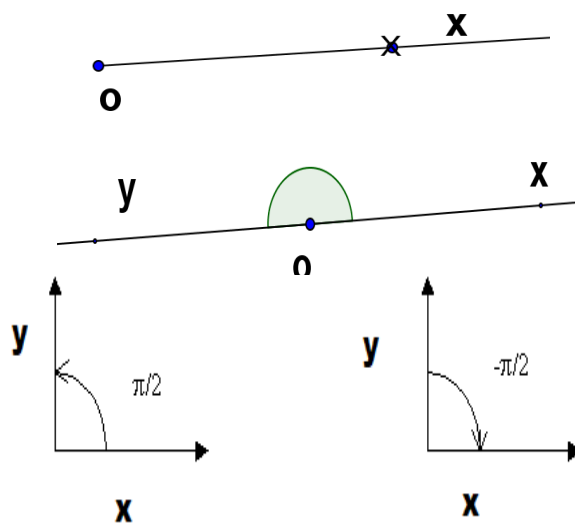
$$\overline{(Ox;Oy)} = \pi + 2k\pi \text{ ou } \overline{(Ox;Oy)} \equiv \pi[2\pi]$$

2) L'angle orienté droit direct

$$\overline{(Ox;Oy)} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \overline{(Ox;Oy)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

L'angle orienté droit indirect

$$\overline{(Ox;Oy)} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \overline{(Ox;Oy)} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$



▪ **Relation de Chasles pour les angles orientés de deux demi-droites**

Soit  $[Ox]$  et  $[Oy]$  et  $[Oz]$  trois demi-droites d'origine O

$$\text{On a : } \overline{(Ox;Oy)} + \overline{(Oy;Oz)} \equiv \overline{(Ox;Oz)}[2\pi]$$

**Conséquence :**

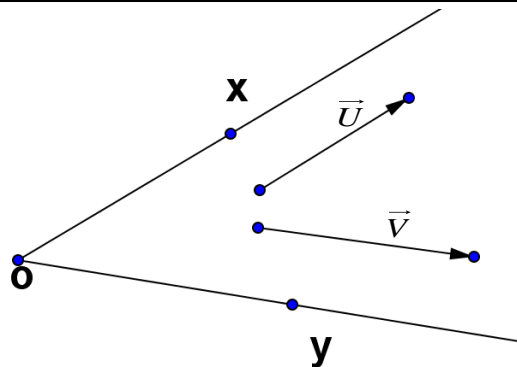
$$\overline{(Ox;Oy)} \equiv -\overline{(Oy;Ox)}[2\pi]$$

**4) L'angle orienté de deux demi-droites**



Soit  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  deux vecteurs non nuls et  $[Ox)$  et  $[Oy)$  deux demi-droites dirigées respectivement par  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$

**Définition :** l'angle orienté des vecteurs non nuls  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  dans cet ordre est l'angle orienté  $(Ox;Oy)$  et on le note :  $(\vec{U};\vec{V})$



✓ Les mesures de  $(\vec{U};\vec{V})$  sont Les mesures de l'angle orienté  $(Ox;Oy)$

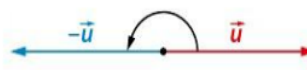
✓ La mesure principale de  $(\vec{U};\vec{V})$  est La mesure principale de  $(Ox;Oy)$

et on la note :  $(\vec{U};\vec{V})$

**Propriétés :** Pour tout vecteur  $\vec{u}$  non nul, on a :

$$1) (\vec{u};\vec{u}) \equiv 0[2\pi]$$

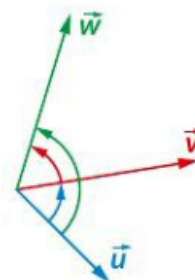
$$2) (\vec{u};-\vec{u}) \equiv \pi[2\pi]$$



### ▪ Relation de Chasles pour les angles orientés de deux vecteurs

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  non nuls, on a :

$$(\vec{u};\vec{v}) + (\vec{v};\vec{w}) \equiv (\vec{u};\vec{w})[2\pi]$$



Voici des propriétés sur les angles orientés que nous allons démontrer à l'aide de la relation de Chasles :

**Propriété :** On considère deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

1.  $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$
2.  $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$
3.  $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$
4.  $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$  où  $k$  est entier relatif

**Démonstration :**

1. D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) = 0 + 2k\pi$$

$$\text{Donc } (\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

2. D'après la relation de Chasles :

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$\text{Donc } (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

3. D'après la relation de Chasles :

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) + 2k\pi = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

$$\text{Donc } (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k'\pi$$

4. D'après la relation de Chasles :

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) + 2k\pi = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

$$\text{Donc } (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

### III) Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.

#### 1) Repère orthonormé lié au cercle trigonométrique

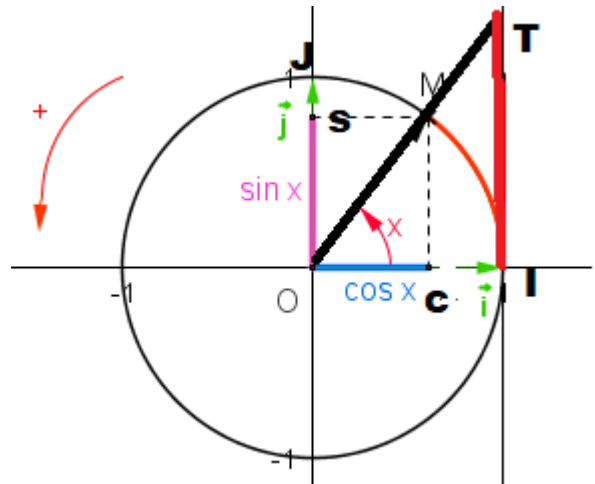
Soit  $(C)$  un cercle trigonométrique de centre  $O$  et d'origine  $I$

Soit  $J$  un point de  $(C)$  tel que l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  soit droit et direct

On a donc  $OI = OJ = 1$  et  $(OI) \perp (OJ)$

Le Repère orthonormé  $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$  est appelé

Repère orthonormé lié au cercle trigonométrique  $(C)$



#### 2) Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.

Soit  $x \in \mathbb{R}$  il existe un point  $M$  de  $(C)$  unique tel que  $x$  est une abscisse curviligne de  $M$

##### ✓ Sinus et cosinus du nombre réel $x$

Soit  $C$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OI)$

Et soit  $S$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(OJ)$

##### Définitions :

- Le cosinus du nombre réel  $x$  est l'abscisse de  $M$  et on note **cos**  $x$ .
- Le sinus du nombre réel  $x$  est l'ordonnée de  $M$  et on note **sin**  $x$ .

##### ✓ Tangente du nombre réel $x$

Soit  $(\Delta)$  la droite tangente à  $(C)$  en  $I$

Si  $M \neq J$  et  $M \neq J'$  alors la droite  $(OM)$  coupe la tangente  $(\Delta)$  en un point  $T$

Le nombre réel  $\overline{IT}$  l'abscisse de  $T$  sur l'axe  $(\Delta)$  est appelé : La tangente du nombre réel  $x$  et on note **tan**  $x$ .

##### Remarques :

✓ Les rapports trigonométriques : **cos**  $x$  et **sin**  $x$  et **tan**  $x$ . sont aussi appelés cosinus et sinus et tangente de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$

✓ **tan**  $x$  existe ssi  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  et  $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

✓ **La cotangente** de  $x$  est le nombre réel  $x$  noté **cotant**  $x$  et on a :  $\text{cotan } x = \frac{1}{\tan x}$

## 2) Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

### Propriétés :

Pour tout nombre réel  $x$ , on a :

- 1)  $-1 \leq \cos x \leq 1$                       2)  $-1 \leq \sin x \leq 1$                       3)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- 4)  $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$  où  $k$  entier relatif                      5)  $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$  où  $k$  entier relatif
- 6) si  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  et  $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  alors :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- 7) si  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  et  $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  alors :  $\tan(x + k\pi) = \tan x$

Démonstration : 4) et 5)

Aux points de la droite orientée d'abscisses  $x$  et  $x + 2k\pi$  ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

3) le triangle (OCM) est rectangle en C. Le théorème de Pythagore donne alors  $OC^2 + CM^2 = 1$ . Or  $OC = \cos x$  et  $CM = \sin x$

En remplaçant, il vient que :  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Remarque :

On dit que cosinus et sinus sont périodiques de période  $2\pi$ .

Conséquence :

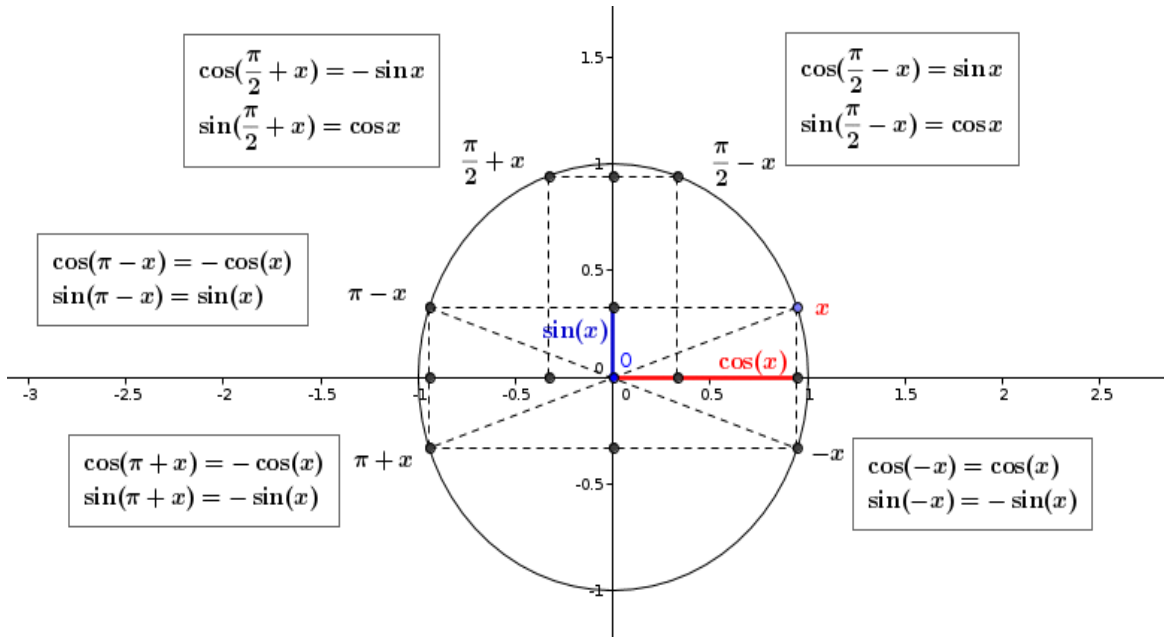
Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur  $2\pi$  et de la compléter par translation.

## 3) Propriétés de Cosinus, sinus et tangente

Pour tout nombre réel  $x$ , on a :

- 1)  $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$                       2)  $\cos(\pi + x) = -\cos x$  et  $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- 3)  $\cos(\pi - x) = -\cos x$  et  $\sin(\pi - x) = \sin x$                       4)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- 5)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$                       et                       $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- 6)  $\tan(\pi - x) = -\tan x$  et  $\tan(\pi + x) = \tan x$  si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 7)  $\tan(\pi - x) = -\tan x$  et  $\tan(\pi + x) = \tan x$  si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Démonstrations : Par symétries, on démontre les résultats :



**APPLICATION :**

Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivantes

$$7\pi, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{4\pi}{3}$$

**Solution :**

$$\checkmark \cos(7\pi) = \cos(\pi + 6\pi) = \cos(\pi + 2 \times 3\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\sin(7\pi) = \sin(\pi + 6\pi) = \sin(\pi + 2 \times 3\pi) = \sin(\pi) = 0$$

$$\tan(7\pi) = \tan(0 + 7\pi) = \tan(0) = 0$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

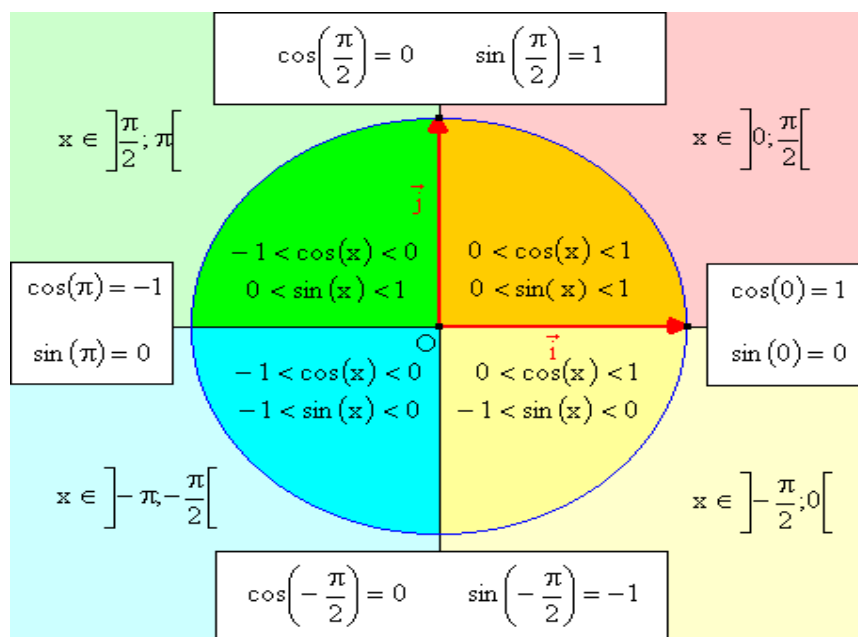
**Exercice :** montrer que :  $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$  si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\textbf{Solution : } 1 + (\tan x)^2 = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

$$\text{Et on a : } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ donc : } 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

#### 4) Signe de Cosinus, sinus

Le sinus et le cosinus de tout nombre réel font partie de l'intervalle  $[-1 ; 1]$ . Plus précisément, la position de  $M$  nous permet d'en savoir plus sur le cosinus et le sinus de  $x$ . Ainsi :



- Si  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  alors  $\cos x \geq 0$
- Si  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$  alors  $\cos x \leq 0$
- Si  $0 \leq x \leq \pi$  alors  $\sin x \geq 0$
- Si  $\pi \leq x \leq 2\pi$  alors  $\sin x \leq 0$

**Exercice :** montrer que :  $\tan x = \frac{1}{3}$  et  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Calculer : 1)  $\cos x$       2)  $\sin x$

**Solution :** 1) on a :  $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$  donc  $1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$

Donc  $1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$  Donc  $\frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$  Donc  $10 \cos^2 x = 9$

Donc  $\cos^2 x = \frac{9}{10}$  Donc  $\cos x = \sqrt{\frac{9}{10}}$  et  $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  : donc  $\cos x \leq 0$  Donc :  $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$$2) \text{ on a : } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} : \text{ donc } \sin x = \tan x \times \cos x \text{ donc } \sin x = -\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

**Exercice :** simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x)$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x)$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

**Solution :** on a : donc

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x)$$

$$A = \sin(x) \times \sin(x) - \cos x \times (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x + \sin x}{-\cos x} = -\frac{2 \sin x}{\cos x} = -2 \tan x$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$$

$$C = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Donc : } C = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$D = \sin(10\pi + \pi - x) + \cos(4\pi + \pi + x) + \cos(2 \times 7\pi - x)$$

$$D = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(-x)$$

$$D = \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = \sin(x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x) = -\tan(x) + \tan(x) = 0$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi \quad \text{donc : } \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{Et on a } \frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi \quad \text{donc : } \frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$$

$$\text{Et on a } \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi \quad \text{donc : } \frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{Donc : } G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

$$\text{Donc : } G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi \quad \text{donc : } \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Et on a } \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi \quad \text{donc : } \frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$$

$$\text{Donc : } H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{Donc : } H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\text{Et on a } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc : } \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Donc on a : } H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\text{Donc } H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2 \times 1 = 2$$