

## **PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$**

### **Etude analytique (2) -Applications- : cercle**

Dans tout ce qui va suivre le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé.

#### **1) EQUATION D'UN CERCLE**

**Définition :** Soient  $\Omega$  un point et  $r$  un réel positif, le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points  $M$  dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) qui vérifient :  $\Omega M = r$  on le note,  $\mathcal{C}(\Omega, r) : \mathcal{C}(\Omega; r) = \{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r\}$

**Remarque :** On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

#### **1) Cercle défini par son centre et son rayon.**

Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $r$  un réel positif,

$$M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega; r) \Leftrightarrow \Omega M = r$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

**Exemple :** déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre  $\Omega(-1; 2)$  et de rayon  $r = 3$

**Solution :** l'équation cartésienne du cercle est :

$$\mathcal{C}(\Omega, r): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

$$C \text{ a d : } x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

**Propriété :** Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $r$  un réel positif, le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  à une équation cartésienne de la forme :  $\mathcal{C}(\Omega, r): (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

#### **2) Equation réduite d'un cercle**

$$\text{On a : } M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \text{ où : } \alpha = -2a; \beta = -2b \text{ et } \gamma = a^2 + b^2 - r^2$$

**Propriété1 :** Tout cercle dans le plan à une équation de la forme :  $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$  où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des réels.

**Propriété2 :** Soit  $(C)$  L'ensemble des points

$M(x, y)$  du plan tel que :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

avec  $a$ ;  $b$ ;  $c$  des réelles

• Si :  $a^2 + b^2 - c > 0$

alors  $(C)$  est une cercle de centre

$\Omega(a; b)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

• Si :  $a^2 + b^2 - c = 0$  alors  $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

• Si :  $a^2 + b^2 - c < 0$  alors  $(C) = \emptyset$

**PREUVE :**  $M(x, y) \in (C) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + c - a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c = 0$$

• Si :  $a^2 + b^2 - c > 0$  alors  $(C)$  est une cercle de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

• Si :  $a^2 + b^2 - c = 0$  alors  $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

• Si :  $a^2 + b^2 - c < 0$  alors  $(C) = \emptyset$

**Exemples :** Déterminer L'ensemble  $(E)$  dans les cas suivants :

$$1) (E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

$$2) (E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$$

$$3) (E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$$

**Solutions :** 1)  $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = -4$

$$\text{On a : } a^2 + b^2 - c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{13}{2} > 0$$

$$\text{Donc : } \Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right) \text{ donc } \Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

alors  $(E)$  : est une cercle de centre

$$\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$2) a = 3; b = -1; c = 10 \quad a^2 + b^2 - c = 3^2 + (-1)^2 - 10 = 9 + 1 - 10 = 0$$

$$\text{alors } (E) = \{\Omega(3; -1)\}$$

$$3) a = 2; b = 0; c = 5$$

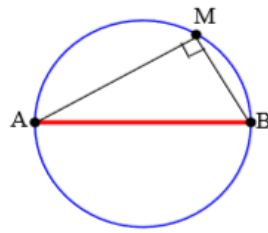
$$a^2 + b^2 - c = 4 - 5 = -1 < 0 \text{ alors } (E) = \emptyset$$

#### **3) Cercle définie par son diamètre.**

### Propriété : (Rappelle)

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts dans le plan l'ensemble des points  $M$

qui vérifient  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ . Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :



**Propriété :** Soient  $A(x_A; y_A)$

et  $B(x_B; y_B)$  deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre  $[AB]$  a pour équation :

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$$

**Exemple :** Déterminer une équation du cercle de diamètre  $[AB]$  avec  $A(1;2)$  et  $B(-3;1)$

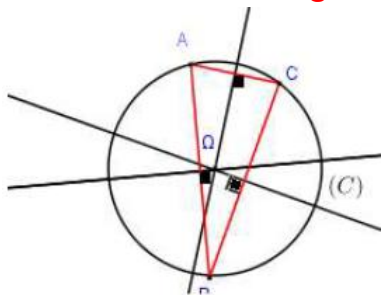
**solution :**  $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\overrightarrow{MA}(1-x; 2-y) \text{ et } \overrightarrow{MB}(-3-x; 1-y)$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (-3-x)(1-x) + (1-y)(2-y) = 0$$

$$\text{Donc : } (C) : x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$$

### 4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle



Soit  $ABC$  un triangle, les médiatrices du triangle  $ABC$  se coupent en  $\Omega$  le Centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$

**Exemple :** le plan  $(P)$  est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé. Soient les points

$$A(2;3) \quad B(0;1); \quad C(-4;5); \quad E(5;2) \text{ et } F(2;4)$$

1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle  $ABC$ .

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle

$OEF$ . **Solution :** 1) Soient  $I(1;2)$  et  $J(-1;4)$  le milieu respectivement du segments :  $[AB]$  et  $[AC]$

Et soit  $(\Delta)$  la médiatrice de  $[AB]$  donc  $(\Delta)$  passe par  $I(1;2)$  et  $\overrightarrow{AB}$  un vecteur normal a  $(\Delta)$

Et on a :  $\overrightarrow{AB}(-2; -2)$  donc une équation de  $(\Delta)$  est :

$$(\Delta) : -2(x-1) - 2(y-2) = 0$$

$$\text{Donc : } (\Delta) : -2x + 2 - 2y + 4 = 0 \text{ donc } (\Delta) : -2x - 2y + 6 = 0$$

donc  $(\Delta) : x + y - 3 = 0$  (après simplifications)

Et soit  $(\Delta')$  la médiatrice de  $[AC]$  donc  $(\Delta')$  passe par  $J(-1;4)$  et  $\overrightarrow{AC}$  un vecteur normal a  $(\Delta')$  et on

a :  $\overrightarrow{AC}(-6;2)$  donc une équation de  $(\Delta')$  est :

$$(\Delta') : -6(x+1) + 2(y-4) = 0 \text{ donc : } (\Delta') : 3x - y + 7 = 0$$

On a  $\Omega$  est le Centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  donc le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(\Delta')$  on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} (\Delta) : x + y - 3 = 0 \\ (\Delta') : 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est :  $(-1;4)$  donc

$\Omega(-1;4)$  est le centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  et le rayon est :

$$r = A\Omega = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$$

Et l'équation du cercle est :  $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$

$$(C) : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$$

2) déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle  $OEF$ .

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :

$$(C') : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Et on a :  $O \in (C') \Leftrightarrow c = 0$

$$E(5;2) \in (C') \Leftrightarrow 25 + 4 - 10a - 4b = 0$$

$$F(2;4) \in (C') \Leftrightarrow 4 + 16 - 4a - 8b = 0$$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 10a + 4b = 29 \\ a + 2b = 5 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{19}{8} \\ b = \frac{21}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$$(C') : x^2 + y^2 - \frac{19}{4}x - \frac{21}{8}y = 0$$

### II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

**Définition :** Soit  $C(\Omega; r)$  un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points  $M$  dans le plan qui vérifient  $\Omega M \leq r$  s'appelle la boule fermée de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ , il s'appelle aussi l'intérieur du cercle  $C(\Omega; r)$

b) L'ensemble des points  $M$  dans le plan qui vérifient  $\Omega M > r$  s'appelle l'extérieur du cercle  $C(\Omega; r)$

**Application :** La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

**Exemple :** Nous allons résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} = 0$$

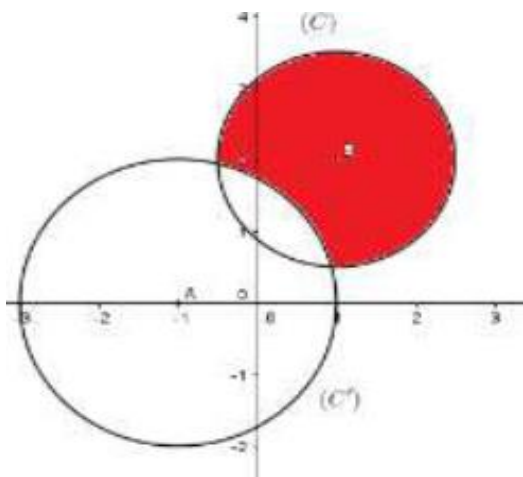
est l'équation du cercle  $(C)$

de centre  $B(1,2)$  et de rayon  $r = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$  est l'équation du cercle  $(C')$

de centre  $A(-1,0)$  et de rayon  $r' = 2$ .

L'ensemble des points  $M$  qui vérifient  $(S)$  est l'extérieur de  $(C')$  intersection l'intérieur de  $(C)$



**Exercice1 :** résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

Solution :

- (1):  $x^2 + y^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < 2^2$

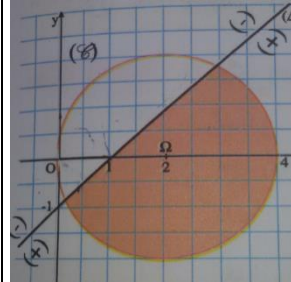
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples  $(x; y)$  des points qui se trouvent à l'intérieur du cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(2;0)$  et de rayon  $r = 2$

- (2):  $x - y - 1 > 0$  : les solutions de cette inéquation c'est les couples  $(x; y)$  des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation :  $(\Delta): x^2 + y^2 - 4x = 0$

(demi plan qui contient  $\Omega(2;0)$ )

Car :  $2 - 0 - 1 = 1 > 0$

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples  $(x; y)$  des points qui appartiennent à la partie colorée.



**Exercice2 :** Résoudre graphiquement  $(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9)(2x - y + 1) \leq 0$

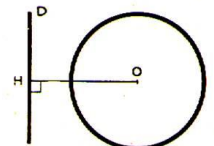
### III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

#### 1) Propriété

Soit  $C(O; r)$  un cercle de rayon  $r$  strictement positif et  $(D)$  une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle  $C(O; r)$  de  $(D)$ , il suffit de déterminer la distance de  $O$  à  $(D)$ . soit  $H$  la projection orthogonal de  $O$  sur  $(D)$

1) Si  $d(O; (D)) = OH > r$

Soit  $M$  un point de la droite  $(D)$  on a :  $OM \geq OH > r$  donc tout point de la droite  $(D)$  est strictement à l'extérieur du cercle  $(C)$   
 $(C) \cap (D) = \emptyset$



2)  $d(O; (D)) = OH = r$

Puisque  $OH = r$  alors  $H$  est un point commun entre  $(D)$  et  $(C)$ .

Soit  $M$  un point de la droite  $(D)$

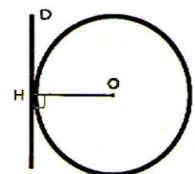
Différent de  $H$  on a :

$OM > OH = r$

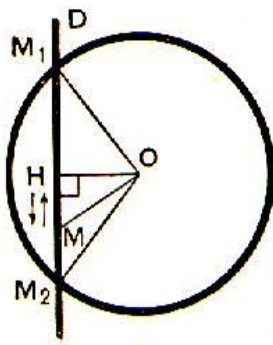
Donc tout point de la droite  $(D)$  différent de  $H$  est strictement à l'extérieur du cercle  $(C)$ .

$(C) \cap (D) = \{H\}$

On dit que la droite  $(D)$  est tangente au cercle  $(C)$  en  $H$



3)  $d(O, (D)) = OH < r$



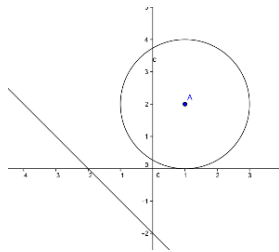
Dans ce cas le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points  $M_1$  et  $M_2$  et H est le milieu du segment  $[M_1M_2]$

**Exemple1** : Etudier la position du cercle de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 2$  avec la droite d'équation (D) :  $x + y + 2 = 0$

Solution : on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$

Donc : droite (D) est à l'extérieur du cercle (C)  
 $(C) \cap (D) = \emptyset$



**Exemple2** : Etudier la position du cercle (C) de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 2$  avec la droite d'équation (D) :  $x - y + 2 = 0$

Solution : on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

Donc : le cercle (C) et la droite (D) se coupent en deux points A et B  
 Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = (2)^2 \\ (2)x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

On a : (2)  $\Leftrightarrow x + 2 = y$

On remplaçant dans (1)  $y = x + 2$

On trouve :  $(1)(x-1)^2 + (x+2-2)^2 = (2)^2$

Donc :  $(x-1)^2 + (x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 4$

Donc :  $2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Delta = 28$

Donc :  $x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4}$  et  $x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4}$

Donc :  $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$  et  $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$

Si :  $x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$  on remplace dans  $x + 2 = y$

On trouve :  $y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$

Si :  $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$  on remplace dans  $x + 2 = y$

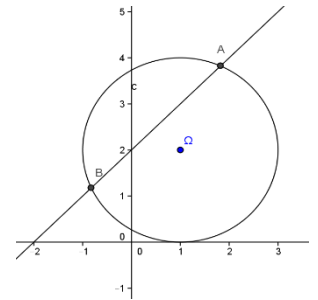
On trouve :

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Donc : les points d'intersections sont :

$$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \text{ et}$$

$$B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$



**Exemple3** : Etudier la position du cercle (C) de centre  $\Omega(1;2)$  et de rayon  $R = 1$  avec la droite d'équation (D) :  $y = 3$

Solution : on calcul  $d(\Omega, (P))$  ?

(D) :  $0x + 1y - 3 = 0$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle (C) en A  
 Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

L'équation de (C) est  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2$

On va résoudre le système suivant :

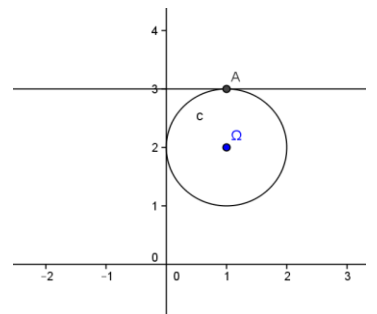
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (2)y = 3 \end{cases}$$

On remplaçant dans  $y = 3$  dans (1)

On aura :

$$(1)(x-1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$$

Donc :  $x = 1$  donc point de tangence est  $A(1;3)$



## 2) Droite tangente à un cercle.

### 2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

**Définition :** Une droite ( $D$ ) est dite tangente à un cercle ( $C$ ) s'ils se coupent en un seul point.

**Propriété :** Une droite ( $D$ ) est dite tangente au cercle  $C(\Omega, r)$  si et seulement si  $d(\Omega, (D)) = r$

### 2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit  $C(\Omega, r)$  un cercle dans le plan où  $\Omega(a, b)$  et  $A$  l'un de ses points.

Soit la droite ( $T$ ) la tangente à  $C(\Omega, r)$  en  $A$

$$M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$$

**Propriété :** Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $C(\Omega, r)$  un cercle dans le plan et  $A$  l'un de ses points. La droite ( $T$ ) tangente à  $C(\Omega, r)$  en  $A$  à pour équation :

$$(x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$$

**exemple :** Soit ( $C$ ) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

1) Vérifier que  $A(0; 1) \in (C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle ( $C$ ) en  $A$ .

**Solution :** 1) On a :  $0^2 + 1^2 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 1 = 0$

Donc  $A(0; 1) \in (C)$

2) L'équation de la tangente au cercle ( $C$ ) en  $A$ . ??

$$a = 2; b = 1; c = 1 : a^2 + b^2 - c = 2^2 + 1^2 - 1 = 4 > 0$$

Donc ( $C$ ) cercle de centre  $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$  cad  $\Omega(2; 1)$

$$\overrightarrow{A\Omega}(-2; 0) \text{ et } \overrightarrow{AM}(x-0; y-1)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$-2(x-0) = 0 \Leftrightarrow -2(x-0) + 0(y-1) = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow x = 0$$

Donc : L'équation de la tangente au cercle ( $C$ ) en  $A$  est : ( $D$ ):  $x = 0$

**Application :** Soit ( $C$ ) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$$

1) Vérifier que le point  $A(3, -1)$  appartient au cercle

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle ( $C$ ) en  $A$ .

### 2.3 Tangente à un cercle ( $C$ ) passante par un point à l'extérieur de ( $C$ )

**Exercice :**

Soient le cercle ( $C$ ):  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$  et  $A(5, 6)$

1- Vérifier que le point  $A$  est à l'extérieur de ( $C$ )

2- a) Déterminer l'équation de la droite ( $\delta$ ) passante par  $A$  et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que ( $\delta$ ) n'est pas tangente à ( $C$ ).

3- Soit ( $\Delta$ ) une droite qui passe par  $A$  et qui n'est pas parallèle à l'axe ( $Oy$ ) et dont l'équation réduite est :

$$(\Delta) y = mx + p$$

a) Déterminer l'équation de ( $\Delta$ ) en fonction de  $m$  uniquement.

b) Déterminer  $m$  pour que ( $\Delta$ ) soit tangente au cercle ( $C$ ).

4- Soit  $B(4, 5)$

a) Montrer que la droite passante par  $B$  et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle ( $C$ ).

b) Soit ( $\Delta'$ ) une droite qui passe par  $A$  et qui n'est pas parallèle à l'axe ( $Oy$ ) et dont l'équation réduite est :

( $\Delta'$ )  $y = mx + p$  ; Déterminer  $m$  pour que ( $\Delta$ ) soit tangente au cercle ( $C$ ).

### 2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit ( $C$ ) le cercle de centre  $\Omega(-1, 2)$  et de rayon 3.

Déterminer les équations des tangentes à ( $C$ ) et de vecteur directeur  $\vec{u}(-2; 1)$ .

## 3) Equation paramétrique d'un cercle.

le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$

orthonormé.

Considérons ( $C$ ) le cercle de centre  $\Omega(a, b)$  et de

rayon  $r$ . On a :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OM}$  (1)

Si  $M(x, y)$  dans  $\mathcal{R}$  et  $M(X, Y)$  dans  $\mathcal{R}'$  où :

$$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j}) \text{ et } \mathcal{R}'(O; \vec{i}; \vec{j})$$

Alors (1) se traduit analytiquement par :  $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

$$\text{or } \begin{cases} X = r \cos \alpha \\ Y = r \sin \alpha \end{cases} \text{ et par suite : } \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases}$$

Réciproquement l'ensemble

$$(C) = \left\{ M(x; y) \in (P) / \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases} \right\}$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels et  $r$  un réel positif est le cercle de centre  $\Omega(a, b)$  et de rayon  $r$

**Exemple 1 :** Déterminer l'équation paramétrique du cercle ( $C$ ) de centre  $\Omega(1; -2)$  et de rayon  $r = \sqrt{2}$

**Solution :** l'équation paramétrique du cercle ( $C$ ) de

centre  $\Omega(1; -2)$  et de rayon  $r = \sqrt{2}$  est :

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{2}\cos\theta & \text{avec } (\theta \in \mathbb{R}) \\ y=-2+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$$

**Exemple2 :** Déterminer l'ensemble  $(C)$  des points  $M(x;y)$  du plan tel que :

$$\begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta & \text{avec } (\theta \in \mathbb{R}) \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$$

**Solution :**  $\begin{cases} x-3=\sqrt{3}\cos\theta \\ y-1=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=(\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\sin\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=3((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$$

Donc l'ensemble  $(C)$  des points  $M(x;y)$  du plan est le cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(3;1)$  et de rayon  $R=\sqrt{3}$

**Exercice1 :** le plan  $(P)$  est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O;\vec{i};\vec{j})$  orthonormé.  $(C)$  l'ensemble des points

$$M(x;y) \text{ du plan tel que : } \begin{cases} x=2+2\cos\theta & \text{avec } (\theta \in \mathbb{R}) \\ y=2\sin\theta \end{cases}$$

1) montrer que  $(C)$  est le cercle  $(C)$  dont on déterminera de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  et une équation cartésienne

2) soit le point  $A(-1;0)$  ; montrer que  $A$  est à

l'extérieur du cercle  $(C)$  et déterminer les équations

des deux tangentes au cercle  $(C)$  passant par  $A$

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x-4y=0$$

4)a) soit la droite  $(\Delta)$  d'équation :  $y=x$

Montrer que  $(\Delta)$  coupe le cercle  $(C)$  en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points

$$M(x;y) \text{ du plan tel que : } \frac{x^2+y^2}{4} \leq x \leq y$$

**Solution :1)**  $\begin{cases} x=2+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2\cos\theta \\ y-0=2\sin\theta \end{cases}$

$$(x-2)^2+(y-0)^2=(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+(y-0)^2=4((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2+(y-0)^2=2^2$$

Donc l'ensemble  $(C)$  des points  $M(x;y)$  du plan est le cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(2;0)$  et de rayon  $R=2$

2)  $A(-1;0)$  ;  $(C) : (x-2)^2+(y-0)^2=2^2$

On a :  $(-1-2)^2+(0-0)^2-4=9-4 > 0$  donc  $A$  est à l'extérieur du cercle  $(C)$

Soit  $(T)$  une droite qui passe par  $A$  et tangente au cercle  $(C)$  et soit :  $ax+by+c=0$  une équation cartésienne de  $(T)$  avec  $(a;b) \neq (0;0)$

Puisque  $(T)$  est tangente au cercle  $(C)$  alors :

$$d(\Omega,(T))=R \text{ cad } \frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 :$$

Et on a :  $A \in (T)$  donc :  $-a+c=0$  donc on trouve :

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ ou } b = -\frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ et l'équation cartésienne de}$$

$$(T) \text{ est : } 2x-\sqrt{5}y+2=0 \text{ ou } 2x+\sqrt{5}y+2=0$$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle  $(C)$  passant par  $A$  sont :

$$(T_1) : 2x-\sqrt{5}y+2=0 \text{ ou } (T_2) : 2x+\sqrt{5}y+2=0$$

3)  $(D) : 3x-4y=0 \quad \Omega(2;0)$

Puisque  $(T) \parallel (D)$  donc on pose :

$$(T) : 3x-4y+c=0 \text{ et } (T) \text{ tangentes au cercle } (C)$$

$$\text{Donc : } d(\Omega,(T))=R \Leftrightarrow \text{ cad } \frac{|6+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2 :$$

$$\Leftrightarrow \frac{|6+c|}{5}=2 \Leftrightarrow |6+c|=10 \Leftrightarrow 6+c=10 \text{ Ou } 6+c=-10$$

$$c=4 \text{ ou } c=-16$$

Donc les tangentes au cercle  $(C)$  sont :

$$(T_1') : 3x-4y+4=0 \text{ ou } (T_2') : 3x-4y-16=0$$

4)a) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-0)^2=2^2 & \text{donc : } y=x \text{ et } 2x^2-4x=0 \\ y=x \end{cases}$$

$$\text{donc : } (x=0 \text{ ou } x=2) \text{ et } y=x$$

donc :  $(\Delta)$  coupe le cercle  $(C)$  aux points :

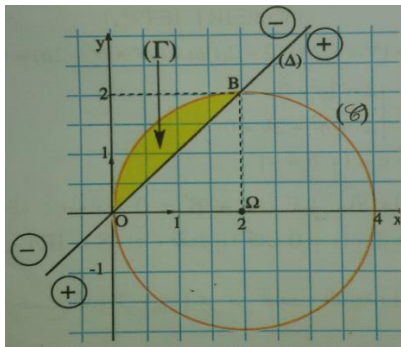
$$O(0;0) \text{ et } B(2;2)$$

4)b)  $\frac{x^2+y^2}{4} \leq x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \leq 0 \\ x^2+y^2-4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \leq 0 \\ (x-2)^2+y^2-4 \leq 0 \end{cases}$

L'inéquation :  $(x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0$  détermine l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle  $(C)$  ou sur le cercle  $(C)$

Et L'inéquation :  $x - y \leq 0$  détermine l'ensemble des points  $M(x; y)$  du plan qui se trouve au-dessus de la droite  $(\Delta)$  ou sur la droite  $(\Delta)$

Voire la figure ci-dessus :



**Exercice2** : le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé. Soient les points

$$A(3; 4) \quad B(4; 1); \quad C(2; -3)$$

1) montrer que les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle  $(C)$  passant par  $A$  ;  $B$  et  $C$

**Solution** : 1) on a :  $\overrightarrow{AB}(1; -3)$  et  $\overrightarrow{AC}(-1; -7)$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Donc les points  $A$  ;  $B$  et  $C$  sont non alignés

1) Soient  $I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$  et  $J(3; -1)$  le milieu

respectivement du segments :  $[AB]$  et  $[BC]$

Et soit  $(D)$  la médiatrice de  $[AB]$  donc  $(D)$  passe par  $I$  et  $\overrightarrow{AB}$  un vecteur normal a  $(D)$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right) - 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$$

Donc :  $(D) : x - 3y + 4 = 0$

Et soit  $(\Delta)$  la médiatrice de  $[BC]$  donc  $(\Delta)$  passe par  $J$  et  $\overrightarrow{BC}$  un vecteur normal a  $(\Delta)$

$$M(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

Donc :  $(\Delta) : x + 2y - 1 = 0$  (après simplifications)

soit  $\Omega$  est le Centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$  donc le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(D)$  on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est :  $\Omega(-1; 1)$  donc

$\Omega(-1; 1)$  est le centre du cercle circonscrit du triangle

$ABC$  et le rayon est :  $r = A\Omega = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5$

Et l'équation du cercle est :  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$

$$(C) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

**Exercice 3**: le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère

$\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé.  $(C_m)$  l'ensemble des points

$M(x; y)$  du plan tel que :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \text{ avec } m \text{ Paramètre réel}$$

1) déterminer l'ensemble  $(C_1)$

2) a) montrer que  $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$   $(C_m)$  est un cercle dont déterminera le centre  $\Omega_m$  et de rayon  $R_m$

2) b) déterminer l'ensemble des centres  $\Omega_m$  lorsque  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) montrer que tous les cercles  $(C_m)$  passent par un point fixe  $I$  dont déterminera et tracer  $(C_0); (C_2); (C_3)$

3) a) montrer que la droite  $(\Delta) : x = 1$  est tangente A toutes les cercles  $(C_m)$

3) b) soit  $m > \frac{-3}{2}$  et  $m \neq 1$  et le point  $A(0; 1)$

Vérifier que  $A$  est à l'extérieur des cercles  $(C_m)$  et que la droite  $(AI)$  n'est pas tangente aux cercles  $(C_m)$

**solution** : 1)  $(C_1)$  ? pour  $m = 1$  on a :

$$(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \text{ et } y+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = -1$$

Donc :  $(C_1)$  est le point  $E(1; -1)$

$$2) a) (C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+1)^2 = (m-1)^2$$

Donc :  $(C_m)$  est un cercle de centre  $\Omega_m(m; -1)$  et de rayon  $R_m = |m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) on pose :  $x = m$  et  $y = -1$  avec  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

on a donc : l'ensemble des centres  $\Omega_m$  lorsque  $m \in \mathbb{R} - \{1\}$  est la droite d'équation :  $y = -1$  privé du

Point  $E(1; -1)$

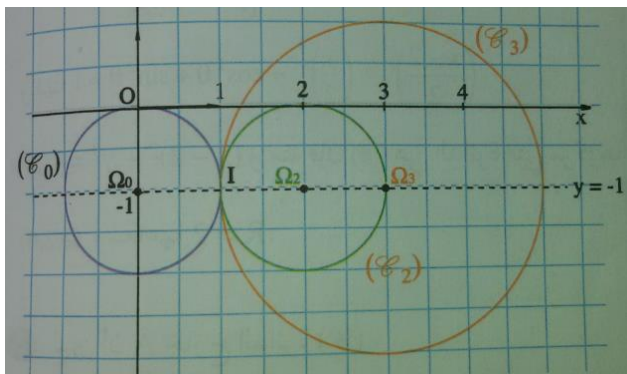
2) b)  $I(a; b) \in (C_m) \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ma + 2b + 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow m(2-2a) + a^2 + b^2 + 2b = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2a = 0 \\ a^2 + b^2 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ Donc : tous les}$$

cercles  $(C_m)$  passent par un point fixe  $I(1; -1)$



3) a) L'équation de  $(\Delta)$  est :  $x + 0y - 1 = 0$

$$\text{Et } d(\Omega_m, (\Delta)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |m-1| = R_m$$

Donc : la droite  $(\Delta)$  est tangente à toutes les cercles  $(C_m)$  (on peut montrer que  $(\Delta)$  coupe en  $(C_m)$  un point unique)

3) b) on a :  $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 2m + 3$

Et puisque :  $m > \frac{-3}{2}$  alors :  $x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m > 0$

donc  $A$  est à l'extérieur des cercles  $(C_m)$

$$\text{Montrons que : } d(\Omega_m, (AI)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} R_m$$

Donc :  $(AI)$  n'est pas tangente aux cercles  $(C_m)$

$$\text{Car : } \frac{2}{\sqrt{5}} R_m \neq R_m$$

**Exercice 1 :** Déterminer les ensembles :

$$(\Gamma_1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$$

$$(\Gamma_2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$$

**Exercice 1 :**

Soient les points  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 2)$  et  $C(5, -2)$

1- Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle  $ABC$ .

**Exercice 2 :** Soit l'ensemble :

$$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$$

où  $m$  est un réel.

1- Montrer que pour tout  $m$  dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $(C_m)$  est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle  $(C_m)$ .

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres  $\Omega_m$  quand  $m$  décrit  $\mathbb{R}$

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de  $m$  le point  $A(-1, 2)$  appartient-il à  $(C_m)$

b) Soit  $M_0(x_0; y_0)$  un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels  $m$

qui vérifient  $M_0 \in (C_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles  $(C_m)$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

