Exercice1 : Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1) $P:"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$
2) $P:"\exists x\in\mathbb{R}/x^2-2=0"$
3) $P: x\in[1;2[$
4) $P:"\ \forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$
5) $P:(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos x\le 1$
6) $P:(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n\prec m$
7) $P:(\exists n\in\mathbb{N})\ 2n+1$ est pair
8) $P:(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11) $P:(\exists! x\in\mathbb{R});x^2=2$
12) $P:(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13) $P:(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

Exercice 2 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.

6; Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

Exercice 3 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases}0\le x\prec 2\\0\le y\prec 2\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ 1$

Exercice 4 : $x\in\mathbb{R}^+$ Montrer que :

$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x}\Rightarrow x=0$

Exercice 5 : 1) Montrer que :

$(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2=0\Rightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}^+$ et $y\in\mathbb{R}^+$ Montrer que:

$x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\Rightarrow x=y=1$

Exercice 6 : Montrer que :

$(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):a^2+b^2=1\Rightarrow|a+b|\le\sqrt{2}$

Exercice 7 : Montrer que si $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$ alors $a+b\in\mathbb{Q}$

Exercice 8 : on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par :

$f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ Montrer que :

$|x-1|\prec\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{4}|x-1|\le|f(x)-f(1)|\le\frac{1}{2}|x-1|$

Exercice 9 : Montrer que : $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{n+1}{n+2}\notin\mathbb{N}$

Exercice 10 : Montrer que pour tout $\forall x\in[-2;2]:2\sqrt{2}\succ\sqrt{4-x^2}$.

Exercice 11: Montrer que pour tout $\forall x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-x+1$.

Exercice 12 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (E):

$1-\frac{x}{4}\succ\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Exercice 13 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$|x-1|+2x-3\ge 0$

Exercice 14 : Montrer que pour tout $\forall x\in\mathbb{R}:\sqrt{x^2+1}+x\succ 0$.

Exercice 15 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (1):

$x^2-|x-2|+5=0$

Exercice 16 : Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 17 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\ne 2$ et $y\ne 2\Rightarrow 2x+2y-xy-2\ne 2$

Exercice 18 : $x\in\mathbb{R}$ et $x\ne -5$

Montrer que : $x\ne -8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\ne 2$

Exercice 19 : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 20 : $x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $x\ne y\Rightarrow(x+1)(y-1)\ne(x-1)(y+1)$

Exercice 21 : Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$

Montrer que $n\times p$ est pair ou n^2-p^2 est un multiple de 8 .

Exercice 22 : Soient $a\succ 0$ et $b\succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

Exercice 23 : Soit f la fonction numérique définit sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2+2x$

Montrer qu'il n'existe pas de nombre positif M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $f(x)\le M$

Exercice 24 : Montrer que : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Exercice 25 : (Contraposée ou absurde)

Soient $a;b\in\mathbb{Q}$

1)Montrer que : $a+b\sqrt{2}=0\Rightarrow a=b=0$

2)en déduire que : $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}\Rightarrow a=a'$ et $b=b'$

Exercice 26 : (absurde)

On considère l'ensemble : $A=\{1;2;3;4;...;n\}$ avec n un nombre entier impair

Et soient x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 ;… ; x_n des éléments de l'ensemble A distincts deux a deux

Montrer que : $\exists i\in A/\ x_i-i$ est pair

Exercice 27 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in[0;1]):x^2\ge x$ est fausse :

Exercice 28 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}):x^2+y^2\ge x+y$ est fausse :

Exercice 29 : Montrer que La proposition $P:(\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2):\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse :

Exercice 30 : Montrer que La proposition suivante est fausse :

« Tout entier positif est somme de trois carrés »

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6=1^2+1^2+2^2$.)

Exercice 31 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R}^*):x+\frac{1}{x}\ge 2$ est fausse :

Exercice 32 : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-x+3$ Montrer que : f n'est ni pair ni impair

Exercice 33 : Montrer que La proposition $P:\forall(a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4;\begin{cases}a\ne b\\ c\ne d\end{cases}\Rightarrow a+c\ne b+d$ est fausse :

Exercice 34 : Montrer que La proposition $P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}):x^2-xy+y^2=0$ est fausse

Exercice 35 : $\forall x>0\quad x+\frac{1}{x}\ge 2$

Exercice 36 : soit $x\in\mathbb{R}$ Montrer que :

$|x-1|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le\frac{1}{x+1}\le\frac{2}{3}$

Exercice 37 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E):

$\sqrt{x^2+1}=2x$

Exercice 38 : $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $|x-y|\le 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

Exercice 39 : 1) Montrer que :

$\left(\forall(a;b)\in\left(\mathbb{R}^+\right)^2\right):a+b=0\Leftrightarrow a=0$ et $b=0$

2) $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ Montrer que:

$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=2\Leftrightarrow x=y=0$

Exercice 40 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\ge 1+2n$.

Exercice 41 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$.

Exercice 42 : Montrer par récurrence que :pour tout entier $n\ge 5$: $2^n\ge 6n$

Exercice 43 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};n^3+2n$ est divisible par 3

Exercice 44 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}.$$

Exercice 45 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2\times(n+1)^2}{4}$.

Exercice 46 : (Récurrence) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Exercice 47 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};4^n+6n-1$ est divisible par 9

Exercice 48 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N};7^n-1$ est divisible par 6

Erreur classique dans les récurrences

Exercice 49 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

P (n) : 10^n-1 est divisible par 9

Q (n) : 10n + 1 est divisible par 9

1) Démontrer que si P (n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Démontrer que si Q (n) est vraie alors Q (n + 1) est vraie.

3) Un élève affirme : " Donc P (n) et Q (n) sont vraies pour tout entier naturel n.

Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.

4) Démontrer que P (n) est vraie pour tout entier naturel n.

5) Démontrer que Q (n) est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 50 : Soit P(n) la propriété dénie sur $\mathbb{N}$ par : 7^n-1 Est divisible par 3

1) Démontrer que si P(n) est vraie alors P (n + 1) est vraie.

2) Que peut-on conclure

Exercice 51 : $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que : $a \in \left]-1;1\right[$ et $b \in \left]-1;1\right[$ Montrer que : $-1 \prec \frac{a+b}{1+ab} \prec 1$

Exercice 52 : Traduisez les propositions suivantes en langage courant puis déterminer sa négation et la valeur de vérité :

1) $P:(\forall x \in \mathbb{R});(\exists y \in \mathbb{R}): x > y$
2) $P:(\exists x \in \mathbb{R});(\forall y \in \mathbb{R}): x > y$
3) $P:(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$
4) $P:(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$
5) $P:(\forall \varepsilon \succ 0);\left(\exists x \in \left\{1+\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) / x \prec \varepsilon + 10$

Exercice 53 : A l'aide de la méthode des tables de vérité, dites si la formules $P ou \overline{P}$ est une tautologies.

Exercice 54 : 1. (Raisonnement direct) Soient $a \in \mathbb{R}^+; b \in \mathbb{R}^+$

Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $0 \leq \sqrt{ab} \leq b$

2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$?

6. (Récurrence) Fixons un réel $a \in \mathbb{R}^{+*}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + n \times a$.