Exercices

1 Définition de suites

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, on demande de calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

1. $u_n = \dfrac{7n-2}{n+4}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
3. u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.
4. u_n est la somme des n premiers nombres pairs strictement positifs.
5. u_n est le nombre de diviseurs positifs de n.
6. Je place 1 000 **Dh** sur mon livret A au taux de 2,5% par an.
   u_n est la somme dont je dispose la $n^{\text{ième}}$ année.
7. u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre π.

2 Sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = 3n - 5$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
4. $u_n = \dfrac{3^n}{2}$.
5. $u_n = \sqrt{n^2+3}$.
6. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
7. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$.
8. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$.
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *(plus difficile)*

3 Majoration, minoration

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par $u_n = 5 - \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = -n^2 + 8n + 1$.
   Montrer que (u_n) est majorée par 17.
4. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

4 Suites arithmétiques

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout n la suite (u_n) par : $u_n = 3n - 2$.
   Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Calculer le $9^{\text{ième}}$ terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.
3. Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -2.
   Calculer u_{15}, puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$.

5 Suites géométriques

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5}$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit u_n une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{81}$ et de raison -3.
   Calculer u_7, puis $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 4\,096$.

Les exercices qui suivent sont des extraits d'annales de bac. Il est assez fréquent d'avoir des suites le jour du bac et une grande partie de leur étude a été faite en première, vous êtes donc déjà très forts.

6 Suite "arithmético-géométrique"

Exercice très classique que vous avez de fortes chances de retrouver dans l'année.

On considère la suite (u_n) de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

et la relation initiale $u_0 = 2$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 6$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ puis $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$.

7 Augmentation de loyer

Une personne loue une maison `a partir du premier janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 **dh** et le locataire s'engage `a occuper la maison pendant 9 ann´ees compl`etes.

Les valeurs décimales seront arrondies, si nécessaire, au centime près.

1. **Contrat n°1 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer u_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer u_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer u_8.
   (d) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.
2. **Contrat n°2 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 **dh** du loyer de l'ann´ee pr´ec´edente.
   (a) Calculer le loyer v_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer v_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

8 Suites et représentation graphique

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ d'une part et $v_1,\ v_2,\ v_3$ d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 5 cm, tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1,\ A_2,\ A_3$ d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ ainsi que les points $B_1,\ B_2,\ B_3$ d'abscisses respectives $v_1,\ v_2,\ v_3$.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Calculer s_0 , s_1, s_2 et s_3. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
   (b) On admet que la suite (s_n) est une suite constante égale à 2. (la démonstration n'est pas du programme de première)
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (d_n) est géométrique.
   (b) Donner l'expression de d_n en fonction de n.
5. En utilisant les questions **3.(b)** et **4.(b)**, donner l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Aide

2 Sens de variation d'une suite

Définition :

- Un suite (u_n) est croissante à partir d'un rang n_0 ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

- Un suite (u_n) est décroissante à partir d'un rang n_0 ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Pour étudier le sens d'une variation, vous avez le choix entre les trois méthodes ci-dessous, et quelquefois c'est dur d'avoir le choix. . . . Il faut vous fiez à votre expérience et à votre maîtrise des calculs.

Méthodes :

- La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- **Pour une suite dont tous les termes sont strictement positifs.**
  La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- Soit la suite u_n définie par $u_n = f(n)$.
  Si la fonction f est croissante sur l'intervalle $[n_0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
  Attention, pour cette dernière propriété, la réciproque est fausse.

Il y a des propriétés correspondantes pour une suite décroissante.

3 Majoration, minoration

Définition :

- Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$

- Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$

- Une suite est bornée, lorsqu'elle est majorée et minorée.

Méthodes :

Pour montrer qu'une suite est majorée par un réel M, on peut :

- Travailler sur des inégalités.
- Montrer que la différence $u_n - M$ est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $u_n = f(n)$, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

4 Suites arithmétiques

- Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r $(r \in \mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on prouve que la différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de n.

- Le premier terme est u_0 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.
- Le premier terme est u_1 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Somme des premiers termes :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
Certains préfèrent le retenir sous une des formes suivantes :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

ou bien : nombre de termes $\times$ moyenne entre le premier et le dernier terme.

5 Suites géométriques

- Une suite (u_n) est dite géométrique de raison q $(q \in \mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de u_{n+1} et on cherche à l'écrire en fonction de u_n.

- Le premier terme est u_0 :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
- Le premier terme est u_1 :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- Somme des premiers termes :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
Certains préfèrent le retenir sous la forme suivante :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

6 Suite "arithmético-géométrique"

- Pour la question 2 : On écrit v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n, puis en fonction de v_n.
- Pour la question 4 : Je sais calculer la somme des termes d'une suite géométrique...

7 Augmentation de loyer

- Pour augmenter une somme de $t\%$, je la multiplie par $\left(1+\frac{t}{100}\right)$.
- Pour le contrat 1, je reconnais une suite géométrique.
- Pour le contrat 2, je reconnais une suite arithmétique.