

TD : LA ROTATION DANS LE PLAN AVEC CORRECTIONS

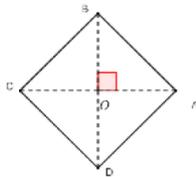
Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ positif. Soit r_A la rotation de

centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

- 1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,
- 2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?

Solution : $r_A\left(A; \frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O; \alpha)$



- $r_A(A) = A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B) = D$ Car $\begin{cases} AB = AD \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D) = B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

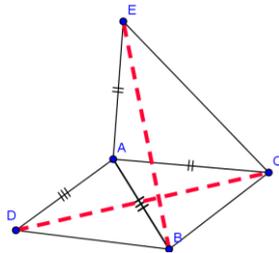
$$2) r_O(A) = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$r_O(A) = C \Leftrightarrow \alpha = \pi$$

Exercice2 : ABC est un triangle.

On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

- 1) Montrer que : $BE = CD$
- 2) Montrer que : $(BE) \perp (CD)$



Solution :

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AD = AB \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc : $r(D) = B$ ❶

On a : $\begin{cases} AC = AE \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc : ❷ $r(C) = E$

Et puisque la rotation conserve les distances Alors de ❶ et ❷ on déduit que $BE = CD$

2) on a $r(D) = B$ et $r(C) = E$

Donc : $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EB}) \equiv \frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE) \perp (CD)$

Exercice3 : ABC est un triangle tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ positif. On construit à l'extérieur les carrés ABDE et ACFG

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

Et Montrer que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$

Solution :

on a : $\begin{cases} AE = AB \\ (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

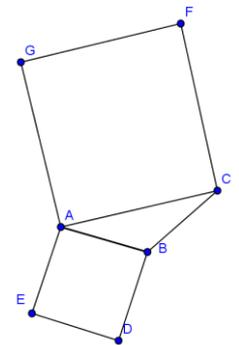
Donc : $r(E) = B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC = AG \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc : ❷ $r(C) = G$

Et on a : $r(A) = A$ ❸ car A le centre de la rotation

De : ❶ et ❷ et ❸ on déduit que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) [2\pi]$



Exercice4 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ et

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$$

Montrer que $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

Solution : il suffit de montrer que : $r(I) = J$???

On pose : $r(I) = I'$

On a : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc

$r(A) = B$

Et on a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{BJ}$ donc $I' = J$

Donc $r(I) = J$ par suite : $\begin{cases} OI = OJ \\ (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images M et N

- respectivement Par la rotation r
 1) Faire une figure et Montrer que $(EF) \perp (MN)$
 2) Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r
 3) Montrer que $DN = FA$ et $(EF) \parallel (AC)$

Solution :1)

on a : ❶ $r(M) = E$

et : $r(N) = F$ ❷

de ❶ et ❷ en déduit que :

$$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{EF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

donc : $(EF) \perp (MN)$

2) on a : $\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(B) = C$ ❸

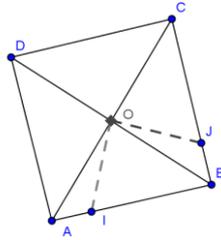
Et on a : $\begin{cases} OD = OA \\ (\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc $r(D) = A$ ❹

de ❸ et ❹ en déduit que : $r((BD)) = (AC)$

3) $DN = FA$???

on a : ❶ $r(D) = A$ et ❷ $r(N) = F$

donc : $DN = FA$



$(EF) \parallel (AC)$???

On a : $(MN) \parallel (BD)$ et $r((BD)) = (AC)$ et

$r((MN)) = (EF)$

Donc : $(EF) \parallel (AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

Exercice6 : ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ positif et O le milieu du segment [BC]. D et E

deux points tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Solution : il suffit de

montrer que : $r(E) = D$???

On pose : $r(E) = E'$

On a : $\begin{cases} OA = OC \\ (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(C) = A$ ❶

Et on a : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A) = B$ ❷

Et on a : $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

De ❶ et ❷ et ❸ : en déduit que : $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la

rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De ❹ et ❺ en déduit

que : $\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{AD}$ cad

$E' = D$

Donc : $r(E) = D$ par

suite : $\begin{cases} OE = OD \\ (\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

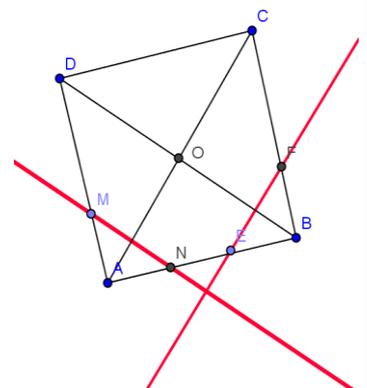
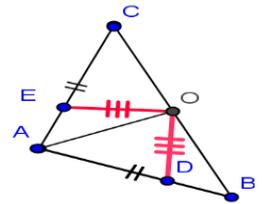
Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Exercice7 : ABCD est

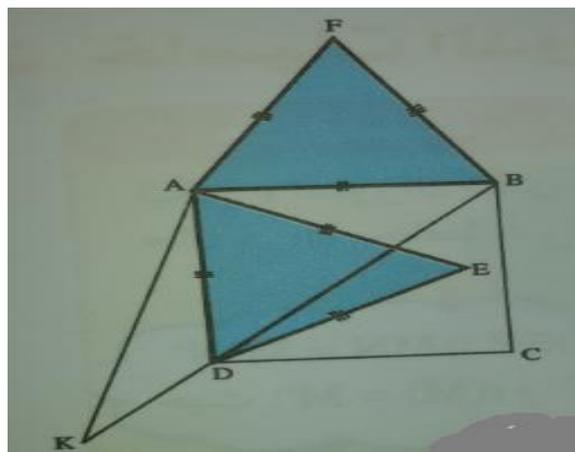
un carré tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ positif. et AED et AFB

deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés



Solution : soit r la rotation de centre A



d'angle $\frac{\pi}{3} : r\left(A; \frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B) = F$

Car $\begin{cases} AB = AF \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D) = E$ Car $\begin{cases} AD = AE \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K) = C$

donc : $AK = AC$ et $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

puisque : $AB = BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$ et $AD = DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK = AC$ et $(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés

Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors : les points : E et C et F sont alignés

Exercice 8 : $ABCD$ est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points

dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite (AN) coupe les droites (DM) et (BP)

Respectivement en E et F

et

la droite (CQ) coupe les droites (DM) et (BP)

Respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

1) Faire une figure dans le cas où : $AB = 6\text{cm}$

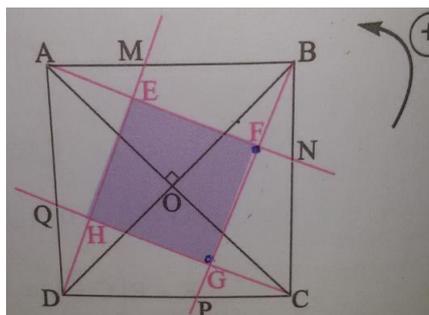
2) Montrer que : $r(M) = N$ et $r(N) = P$ et $r(P) = Q$

et $r(Q) = M$

3) a) Montrer que : $r(F) = G$

b) en déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

Solution : 1)



2) on a $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A) = B$

$\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B) = C$

Et puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

cad : $\overrightarrow{Br(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc : $r(M) = N$

de même : on montre que : $r(N) = P$ et $r(P) = Q$

et $r(Q) = M$

3) a) Puisque : $r(N) = P$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et Puisque : $r(P) = Q$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et puisque : $r(P) = Q$ et $r(B) = C$ alors : $r((BP)) = (QC)$

Donc : $r((AN) \cap (BP)) = r((AN)) \cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\}) = (BP) \cap (QC) = \{G\}$ par suite : $r(F) = G$

3) b) On a : $r(F) = G$ donc : $\begin{cases} OF = OG \\ (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs
et exercices

Que l'on devient un mathématicien