Exercices corrigés

Exercice 1 : déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.
2. Vérifier le résultat sur la calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel h non nul,n le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+(1+h)-(1^2+1)}{h} = \frac{3h+h^2}{h} = 3+h$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0}(3+h) = 3$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Pour trouver la limite de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0, on peut souvent remplacer h par 0 après avoir simplifié l'expression (plus de h au dénominateur).

2.

TI	Casio
Appuyer sur la touche MATH puis 8 (nbreDérivé) : nbreDérivé $= (X^2+X, X, 1)$	En mode RUN-MATH, utiliser les instructions F4 (MATH) puis F4 (d/dx) : $\frac{d}{dx}(X^2+X, 1)$

Exercice 2 : la même chose, plein de fois

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en a (en utilisant la définition) :

1. $f_1(x) = 5x-3$ et $a = 1$
2. $f_2(x) = 3x^2+2x-1$ et $a = 2$
3. $f_3(x) = \sqrt{x+3}$ et $a = -1$
4. $f_4(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $a = -2$

Solution :

1. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_1 entre 1 et $1+h$ est : $\tau_1(h) = \dfrac{f_1(1+h)-f_1(1)}{h}$ (*)
   $(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \dfrac{5(1+h)-3-(5\times 1-3)}{h}$
   $(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \dfrac{5h}{h}$
   $(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = 5$
   Or, $\lim\limits_{h\to 0} 5 = 5$, donc f_1 est dérivable en $a = 1$ et $f_1'(1) = 5$.

2. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_2 entre 2 et $2+h$ est : $\tau_2(h) = \dfrac{f_2(2+h)-f_2(2)}{h}$ (*)
   $(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \dfrac{3(2+h)^2+2(2+h)-1-(3\times 2^2+2\times 2-1)}{h}$
   $(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \dfrac{3h^2+14h}{h}$
   $(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = 3h+14$
   Or, $\lim\limits_{h\to 0} 3h+14 = 14$, donc f_2 est dérivable en $a = 2$ et $f_2'(2) = 14$.

3. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_3 entre -1 et $-1+h$ est : $\tau_3(h) = \dfrac{f_3(-1+h)-f_3(-1)}{h}$ (*)
   $(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{\sqrt{(-1+h)+3}-\sqrt{-1+3}}{h}$
   $(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}{h\times\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{2+h-2}{h \times (\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{h}{h \times (\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$
Or, $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{2+h}+\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau_3(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
Par conséquent, f_3 est dérivable en $a=-1$ et $f_3'(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_4 entre -2 et $-2+h$ est : $\tau_4(h) = \dfrac{f_4(-2+h)-f_4(-2)}{h}$ (*)
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{-2+h+1} - \dfrac{-2}{-2+1}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{2(h-1)}{h-1}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{h-1}$
$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{-1}{h-1}$
Or, $\lim\limits_{h\to 0} h-1 = -1$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau_4(h) = \dfrac{-1}{-1} = 1$.
Par conséquent, f_4 est dérivable en $a=-2$ et $f_4'(-2) = 1$.

Exercice 3 : tangente par le nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x$.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
2. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Afin de déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1, déterminons tout d'abord si f est dérivable en 1.
   – Méthode 1 : Calculons la limite du taux d'accroissement τ de f entre 1 et $1+h$. Pour tout $h \neq 0$:
   $$\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2-(1+h)-(2\times 1^1 - 1)}{h} = \frac{2h^2+3h}{h} = 2h+3$$
   Or, $\lim\limits_{h\to 0}(2h+3) = 3$, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.
   – Méthode 2 : La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et, pour tou x réel, on a
   $$f'(x) = 2 \times 2x - 1 = 4x - 1$$
   En particulier, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4\times 1 - 1 = 3$.

   Nous avons donc montré que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 3$. Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale, de coefficient directeur $f'(1) = 3$. Donc $(\mathcal{T})$ a une équation de la forme : $y = 3x + p$.
   Or, $A(1\ ;\ f(1)) \in (\mathcal{T})$, donc $y_A = 3x_A + p$ $(*)$.
   $(*) \Leftrightarrow f(1) = 3\times 1 + p$
   $(*) \Leftrightarrow 2\times 1^2 - 1 = 3 + p$
   $(*) \Leftrightarrow 1 - 3 = p$
   $(*) \Leftrightarrow p = -2$
   La tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1\ ;\ f(1))$ a donc pour équation $y = 3x - 2$.

TI	Casio
(a) Saisir l'expression de $f(x)$ en Y1 (b) Appuyer sur la touche graphe et choisir l'instruction dessin (2nde PRGM) puis 5 (Tangente) (c) Régler la fenêtre d'affichage (d) Préciser la valeur de x en appuyant sur 1. Valider par ENTER. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).	(a) Choisir l'instruction SET UP (SHIFT MENU). Activer le mode Derivative : choisir ON (F1), suivi de EXE (b) Saisir la fonction en Y1 et tracer la courbe (c) Choisir l'instruction Sketch (SHIFT F4). Sélectionner Tang (F2) (d) Appuyer sur 1 pour sélectionner la valeur de x, puis taper deux fois sur la touche EXE. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).

Exercice 4 : Calculer des nombres dérivés à l'aide des formules

Pour les fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en $x = 2$ puis en $x = \frac{1}{2}$:

1. $f(x) = x^2$
2. $g(x) = x^3$
3. $h(x) = \frac{1}{x}$
4. $i(x) = x^5$
5. $j(x) = \sqrt{x}$

Solution :

1. La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :
$$f'(x) = 2x$$
Par conséquent, $f'(2) = 2 \times 2 = 4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
2. La fonction g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a :
$$g'(x) = 3x^2$$
Par conséquent, $g'(2) = 3 \times 2 = 6$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
3. La fonction h est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, on a :
$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
Par conséquent, $h'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ et $h'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.
4. La fonction i est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_i$, on a :
$$i'(x) = 5x^4$$
Par conséquent, $i'(2) = 5 \times 2^4 = 80$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$.

5. La fonction j est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Pour tout $x > 0$, on a :
$$j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Par conséquent, $j'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5 : Tangente en utilisant les formules de dérivation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
2. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite (d) d'équation$y = 3x - 4$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Solution :

1. La fonction f est une fon,ction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
Par conséquent, la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1) = 2$. Son équation est donc
$$y = 2x + p \ \text{ avec } \ p \in \mathbb{R}$$
De plus, $A(1\ ;\ f(1)) \in (\mathcal{T})$, donc $y_A = 2x_A + p$, c'est-à-dire $f(1) = 2 \times 1 + p$, d'où $p = 1 - 2 = -1$.
Donc
$$(\mathcal{T}) \ : \ y = 2x - 1$$
2. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x est $f'(x) = 2x$.
S'il existe une tangente parallèle à la droite (d) alors son coefficient directeur est le même que (d), c'est-à-dire 3. On cherche donc un réel x tel que
$$f'(x) = 3 \ (*)$$
$(*) \Leftrightarrow 2x = 3$
$(*) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à (d) au point $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ soit $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$.

Exercice 6 : encore une tangente avec un joli calcul de dérivée

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel x, $x^2 + 1 \neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = x^2 + 1$.
Les fonction su et v sont des fonctions polynômes, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel x :
$u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.
De plus, la fonction v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :
$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2(x^2+1) - (2x-3) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 6x + 2}{(x^2+1)^2}$$
La fonction f est donc dérivable en $a = 1$ et $f'(1) = \frac{-2 \times 1^2 + 6 \times 1 + 2}{(1^2+1)^2} = \frac{3}{2}$.
Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donc $f'(1) = \frac{3}{2}$.
Donc $\mathcal{T}$ a pour équation $y = \frac{3}{2}x + p$ où $\ p \in \mathbb{R}$.
De plus, $A(1;\ f(1)) \in \mathcal{T}$, donc $y_A = \frac{3}{2}x_A + p$, soit $\frac{-1}{2} = \frac{3}{2} + p$, donc $p = -2$.
D'où
$$\mathcal{T} \ : \ y = \frac{3}{2}x - 2$$

3. Voir l'exercice sur la tangente via le nombre dérivé (exercice 3).

Exercice 7 : tangente sans l'expression de la fonction

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 3. On sait que $f(3) = -2$ et $f'(3) = 0,5$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.

Solution :
La fonction f est dérivable en 3, donc la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = f'(3)x + p = 0,5x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
Or, $f(3) = -2$, donc la tangente passe par le point $A(3\ ;\ -2)$. Par conséquent, $y_A = 0,5x_A + p$, soit $-2 = 0,5 \times 3 + p$, d'ù $p = -\dfrac{7}{2}$.
La tangente (T) a donc pour équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{7}{2}$.

Exercice 8 : autour du nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(9)$ et $f'(3)$.
2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 2$?
3. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = -1$?

Solution :

1. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

   Par conséquent, $f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$ et $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.
2. Pour tout $x > O$, $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{16}$.

   Il existe donc un unique réel tel que $f'(x) = 2$: $x = \dfrac{1}{16}$.
3. Pour tout $x > O$, $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -1$. Or, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Par conséquent, il n'existe pas de réel x tel que $f'(x) = -1$.

Exercice 9 : Tangente et second degré (que du bonheur !)

Soit f la fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.
On sait que $f(0) = 2$; $f(-1) = 5$ et $f'(-1) = 2$.

1. Monter que les réels a, b et c sont solution d'un système de trois équations à trois inconnies. Résoudre ce système.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1.

Solution :

1. $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$.
   $f(-1) = 5 \Leftrightarrow a - b + c = 5 \Leftrightarrow a - b = 5 - c \Leftrightarrow a - b = 3$.
   La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$. Donc : $f'(-1) = 2 \Leftrightarrow 2a(-1) + b = 2 \Leftrightarrow -2a + b = 2$.
   Nous devons alors résoudre le système suivant :
   $$\begin{cases} a - b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$
   Ce système est équivalent à
   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ -2(3 + b) + b = 2 \end{cases}$$
   c'est-à-dire
   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ b = -8 \end{cases}$$
   Par conséquent, f est définie sur $_R$ par $f(x) = -5x^2 - 8x + 2$.
   Vérifications :

(a) $f(0) = 2$
(b) $f(-1) = -5 + 8 + 2 = 5$
(c) $f'(-1) = -10 \times (-1) - 8 = 2$

2. f est dérivable en -1 et $f(-1) = 2$. Donc la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 2x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
De plus, cette tangente passe par le point $A(1\ ;\ f(1))$, donc $f(1) = 2 + p$, soit $-5 - 8 + 2 = 2 + p$, d'où $p = -13$.
La tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1 a donc pour équation $y = 2x - 13$.