LYCÉE JAÂFAR EL-FASSI EL-FIHRI
1ER-SE1
DURÉE : 2H

1er Devoir surveillé

Exercice 1 (4 Points).

1. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,,\left[(x \neq y) \wedge (xy \neq 1) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \neq \frac{\sqrt{y}}{y+\sqrt{y}+1}\right].$$

2. Montrer que

   (a) $1\,(3\times 1+1)+2\,(3\times 2+1)+3\,(3\times 3+1)+\cdots+n\,(3n+1)=n\,(n+1)^2$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 2 (4 Points).

1. Soient a et b de $\mathbb{R}^+$ tels que $a+b=0$, montrer par l'absurde que $a=0$ et $b=0$.
2. En déduire les solutions des deux équations suivantes :

   (a) $x^2+y^2-2x+4y+5=0$

   (b) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2+2}=0$

Exercice 3 (6 Points).
Soient f une fonction numérique définie par

$$f\,(x)=\frac{x^2-x}{x^2-x+2}$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

   (b) Montrer que f est majorée par 1.

   (c) Montrer que f admet une valeur minimale en $a=\frac{1}{2}$.
2. On considère la fonction numérique h définie par

$$h\,(x)=\frac{x}{x+2}$$

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de h.

   (b) Étudier la variation de h sur D_h.

   (c) En déduire la variation de f sur D_f.

Exercice 4 (6 Points).
On considère les deux fonctions numériques f et g définies par

$$f\,(x)=\tfrac{2(x-1)}{2-x} \quad \text{et} \quad g\,(x)=\tfrac{2}{3}x^3$$

1. Dresser le tableau de variation de f et g.
2. Résoudre dans $]-\infty,2[$ l'équation $f\,(x)=0$, en déduire une interprétation géométrique du résultat.
3. Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans un même repère orthonormal $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.
4. Déterminer graphiquement l'ensemble de solutions de l'inéquation sur $\mathbb{R}^*\setminus\{2\}$

$$\frac{3\,(x-1)}{x^2}\leq x\,(2-x)\,.$$

   (On admet que α et β avec $\alpha<\beta$ sont les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$.)

1 point supplémentaire sur la bonne présentation de la copie