Exercices

Exercice 1

1) Vérifier que : $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

2) Vérifier que : $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

Exercice 2

Calculer $\cos 2x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ c) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

Exercice 3

1) Réduire les expressions suivantes :
   a) $A(x) = \cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$
   b) $B(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
   c) $C(x) = \cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$
2) Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

   a) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

3) x est un réel de l'intervalle $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   a) Réduire l'écriture de l'expression :

$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$$

   b) En déduire que :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

Exercice 4 :

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\cos a = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \sin b = \frac{1}{2}$$

1) Calculer $\sin a$ et $\cos b$.
2) En déduire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 5:

Formules d'addition et de duplication

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$$\sin a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \cos b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

1) Calculer $\cos a$ et vérifier que $\sin b = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2) a) Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
   b) En déduire $(a+b)$ puis b.

Exercice 5 :

Formules d'addition et de duplication

a est un réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

1) Calculer $\cos 2a$
2) a) A quel intervalle appartient $2a$
   b) En déduire a, en justifiant votre réponse.

Exercice 6 :

Formules d'addition et de duplication

a est un réel de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

1) a) Démontrer que : $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$
   b) En déduire que : $\dfrac{1+\sin 2a}{\cos 2a} = \dfrac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$
2) Sans calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$, déduire de la question précédente que :

$$\frac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}} = 1+\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

Exercice 8

demontrer que :

$$\cos 3x + \sin 3x = (\cos x - \sin x)(4\cos x \sin x + 1)$$
$$\cos^2 \frac{5}{2}x - \cos^2 \frac{3}{2}x = (-\sin 4x)\sin x$$
$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$$
$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$$
$$\tan x - \tan y = \frac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$
$$\tan^2 x - \tan^2 y = \frac{\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)}{\cos^2 x\cos^2 y}$$

Exercice 9

1) a) verifier que $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

b) Determiner α *tel que* $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\alpha)$

2) On considere l'equation (E): $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

Montrer que $(E) \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

3) a) Resoudre dans $[0;2\pi]$ *l'equation* (E)

Exercice 10

1) Resoudre dans $\mathbb{R}$ *les équations*

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$
$$\sin 2x = \tan x \quad ; \quad \tan x\cdot\tan 4x = -1$$
$$\cos x + \sin x = 1$$
$$\cos 2x + \cos x - 2 = 0$$
$$\cos 2x + \sin 2x = 1$$

2) resoudre les inequations suivantes :

$$x\in[0;\pi] \quad \sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \succ -1$$
$$x\in\,]-\pi;\pi] \quad \cos x + \sin x + \tan x \geq \frac{1}{\cos x}$$