

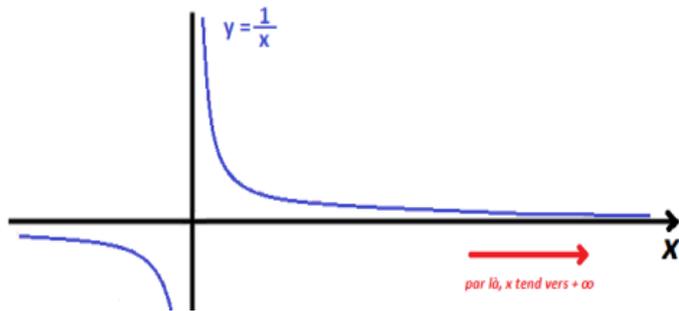
LIMITE D'UNE FONCTION

1) Introduction

La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.

Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction

inverse : $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$



On voit bien que quand x tend vers $+\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure sans jamais la toucher. et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. on note cette limite

de la façon suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Et on prononce cela « limite quand x tend vers plus l'infini de $\frac{1}{x}$ est égal 0 plus ».

2) LIMITE FINIE EN a .

Propriété : $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$

Les fonctions : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$

; $x \mapsto x^n$; $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$; $x \mapsto k|x|^n$

Tendent vers 0 quand x tend vers 0.

Propriété : Si P est une fonction polynôme alors

$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ Une fonction polynôme P c'est une

fonction qui s'écrit de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0$.

Propriété : Si sur un intervalle pointé de centre a si on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a

on a : $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Remarque :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -l$$

Propriété : Si f admet une limite l en a alors cette limite est unique.

3) Limite infinies en $\pm\infty$

Propriété : Les fonctions :

$$x \mapsto x^2 ; x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*) ; x \mapsto \sqrt{x} ; x \mapsto |x|$$

Tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

4) Limite finie en $\pm\infty$

Propriétés : les fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$; $x \mapsto \frac{k}{x^2}$; $x \mapsto \frac{k}{x^n}$:

$$x \mapsto \frac{k}{|x|} ; x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}} ; x \mapsto \frac{k}{|x|^n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

et $k \in \mathbb{R}^*$ Tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5) Limite infinies en un point

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

6) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

Théorème : Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = l$$

7) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

a) Opérations sur les limites finies.

Propriété : Soient f et g deux fonctions tels que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l' \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l' \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l| \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'} \text{ si } l' \neq 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'} \text{ si } l' \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f}(x) = \sqrt{l} \text{ si } l > 0$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a .

b) Opérations sur les limites

Limite de la somme

| | | | | | | |
|--------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim f$ | l | l | l | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim g$ | l' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f + g$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme ind |

Ces propriétés sont vraies si x tend vers : $a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$



Formes indéterminées : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

Limites des produits

| | | | | | | | | | | |
|-------------------|--------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim f$ | ℓ | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell < 0$ | 0 | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim g$ | ℓ' | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f \times g$ | $\ell \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | Forme ind | Forme ind | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

Limites des inverses

| | | | | | |
|--------------------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim f$ | $\ell \neq 0$ | 0^+ | 0^- | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim \frac{1}{f}$ | $\frac{1}{\ell}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 0 |

Limites des quotients

| | | | | | | |
|--------------------|----------------------|-------------|---------------|-------------|---|-------------|
| $\lim f$ | ℓ | ℓ | $\ell \neq 0$ | $\pm\infty$ | 0 | $\pm\infty$ |
| $\lim g$ | $\ell' \neq 0$ | $\pm\infty$ | 0 | ℓ | 0 | $\pm\infty$ |
| $\lim \frac{f}{g}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | 0 | $\pm\infty$ | $\pm\infty$ | ? | ? |

8) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

Propriété : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ($-\infty$) est la limite de son plus grand terme

En $+\infty$ ($-\infty$)

9) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Propriété : La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ($-\infty$) est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $+\infty$ ($-\infty$)

Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

10) Limites des fonctions trigonométriques.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ on a :

a) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

c) si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

11) LIMITES et ordres

Propriété 1: Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et droites de a ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

Propriété 2 : 1) soit f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a - r; a - r[- \{a\}$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$

Si f admet une limite en a et f positif sur I alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$

2) soit f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a - r; a - r[- \{a\}$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$

Si f admet une limite en a et g admet une limite en a et $f \leq g$ sur I alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

3) si on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si x tend vers a à droite, ou a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de a .)

Propriété 3 : 1) Si sur un intervalle de la forme

$]a, a + r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$

2) Si sur un intervalle de la forme $]a, a + r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si x tend vers a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

