

**I. RAPPELS :****A. Fonction numérique :****a. Définition :**

- Toute relation  $f$  qui associe chaque élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  par un élément au plus  $y$  de  $\mathbb{R}$  est appelée

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**fonction numérique de la variable réelle  $x$**  on note  $x \mapsto f(x)$ .

- Tous les éléments  $x$  de  $\mathbb{R}$  qui ont images par  $f$  constituent un ensemble, on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition) on le note  $D_f$  ou  $D$ .

**B. Fonction paire – fonction impaire :****a. Définition :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

- ( $f$  est **paire** sur  $D_f$ )  $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = f(x) \end{cases}$ .
- ( $f$  est **impaire** sur  $D_f$ )  $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = -f(x) \end{cases}$ .

**C. Monotonie d'une fonction numérique :****a. Définition :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est une fonction croissante (**strictement croissante**) sur  $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$   
( $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$ ). (le sens de l'inégalité ne change pas)
- $f$  est une fonction décroissante (**strictement décroissante**) sur  $I$   
 $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$  ( $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$ ). (le sens de l'inégalité change)
- $f$  est une fonction constante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; f(x) = f(x'))$ .

**b. Remarque :**

- $D_f = I \cup I'$  tel que  $I$  et  $I'$  sont symétrique par rapport à zéro.
- Si  $f$  est paire ou impaire sur  $D_f = I \cup I'$  alors il suffit d'étudier  $f$  sur  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = I$  on l'appelle ensemble d'étude (ou domaine d'étude).
- Si  $f$  est paire sur  $D_f = I \cup I'$  alors les variations de  $f$  sont opposées sur  $I$  et  $I'$ .
- Si  $f$  est impaire sur  $D_f = I \cup I'$  alors les variations de  $f$  sont les même sur  $I$  et  $I'$ .

**D. Extrémums d'une fonction :****a. Définition :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  tel que  $x_0 \in D_f$ .

- $f(x_0)$  est valeur maximale absolue de  $f$  ( $f$  admet valeur maximale absolue au point  $x_0$ ) si et seulement si :  $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$ .
- $f(x_0)$  est valeur minimale absolue de  $f$  ( $f$  admet valeur minimale absolue au point  $x_0$ ) si et seulement si :  $\forall x \in D_f, f(x_0) \leq f(x)$ .

**E. Applications :**

▪ **Application 1 :**

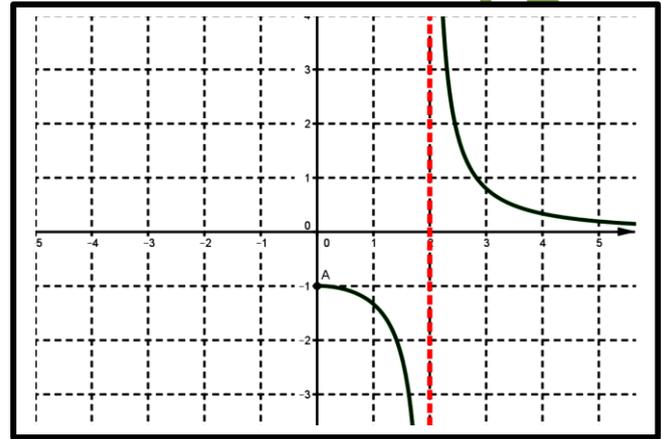
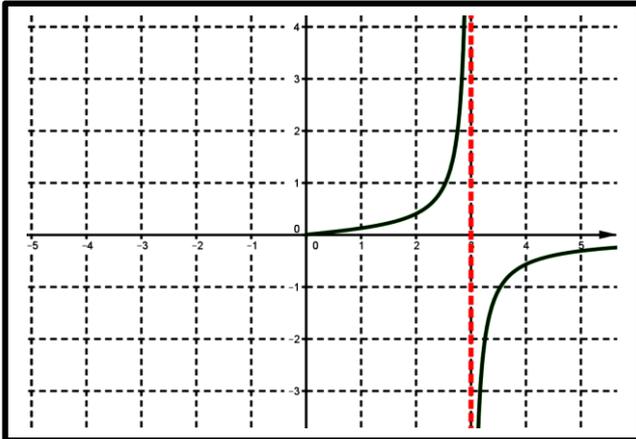
**1.** Compléter le tableau de variation et la courbe de la fonction  $f$  sachant que  $f$  set :

a.  $f$  est paire sur  $D_f$  ( cas n° 1 )

b.  $f$  est impaire sur  $D_f$  ( cas n° 2 )

X	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
f(x)			0 ↗		↗

X	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f(x)			-1 ↘		↘



**2.** Que représente  $f(0)$  pour la fonction pour ( cas n° 1 ) .

▪ **Application 2 :**

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  .

- 1.** Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$  .
- 2.** Etudier la parité de  $f$  . On déduit l'ensemble  $D_E$  d'étude de  $f$  .
- 3.** Etudier la monotonie de  $f$  sur  $[0,1[$  puis sur  $]1,+\infty[$  .
- 4.** On déduit la monotonie de  $f$  sur  $] -1,0]$  puis sur  $] -\infty,-1[$  .
- 5.** Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $D_E$  puis sur  $D_f$  .
- 6.** Est-ce que  $f$  admet un extremum ? à déterminer .

**II. A ajouter complément :**

**A. Extremums relatives :**

**a. Définition :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  tel que  $x_0 \in D_f$  .

- $f(x_0)$  est valeur maximale relative de  $f$  (  $f$  admet valeur maximale relative au point  $x_0$  ) si et seulement si : il existe un intervalle ouvert  $I_{x_0}$  de centre  $x_0$  tel que  $I_{x_0} \subset D_f$  on a :

$$\forall x \in I_{x_0}, f(x) \leq f(x_0) .$$

- $f(x_0)$  est valeur minimale relative de  $f$  (  $f$  admet valeur minimale relative au point  $x_0$  ) si et seulement si : il existe un intervalle ouvert  $I_{x_0}$  de centre  $x_0$  tel que  $I_{x_0} \subset D_f$  on a :

$$\forall x \in I_{x_0}, f(x_0) \leq f(x) .$$

**B. Taux d'accroissement d'une fonction f :**

**a. Définition :**

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle I .

x et x' de I tel que  $x \neq x'$  le nombre  $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$  s'appelle le taux d'accroissement de la fonction

f entre x et x' , on note  $T_f$  .

**b. Application :**

Calculer le taux d'accroissement de la fonction f sur  $\mathbb{R}$  tel que :  $f(x) = 2x$  .

**c. Propriétés :**

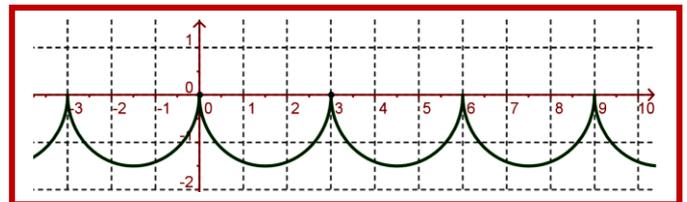
$T_f$  est le taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I .

- Si  $T_f \leq 0$  alors la fonction f est décroissante sur I .
- Si  $T_f < 0$  alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Si  $T_f \geq 0$  alors la fonction f est croissante sur I .
- Si  $T_f < 0$  alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si  $T_f = 0$  alors la fonction f est constante sur I .

**C. Fonction périodique :**

**a. Activité :**

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  . On prend x de  $\mathbb{R}$  .



**1.** Placer sur l'axe des abscisses x et x + 3 .

**2.** Déterminer graphiquement f(x) puis f(x + 3) .

**3.** Quelle remarque peut-on tirer ?

**b. Vocabulaire :**

On a  $\forall x \in \mathbb{R} , f(x+3) = f(x)$  on dit que la fonction f est périodique sur  $\mathbb{R}$  et son période est 3 on note :  $T = 3$  ou  $P = 3$  .

**c. Définition :**

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur  $D_f$  tel que  $T \in \mathbb{R}^+ ( T > 0 )$  .

la fonction f est périodique sur  $D_f$  et son période est T si et seulement si :

- $x \in D_f \Rightarrow ( x+T \in D_f \text{ et } x-T \in D_f ) . (1)$
- $\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x) . (2)$

**d. Remarque :**

- T le plus petit réel strictement supérieur à 0 qui vérifie la relation (2) .
- $f(x) = \sin x$  et  $f(x) = \cos x$  sont périodique de période  $T = 2\pi$  .
- $f(x) = \tan x$  est périodique de période  $T = \pi$  .

**e. Application :**

- Montrer que  $f(x) = \sin ax$  ( avec  $a \neq 0$  ) est une fonction périodique de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  .
- f est une fonction périodique de période T sur  $D_f$  . montrer que :

**1.**  $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall x \in D_f : f(x+nT) = f(x) .$

**2.**  $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall x \in D_f : f(x-nT) = f(x)$

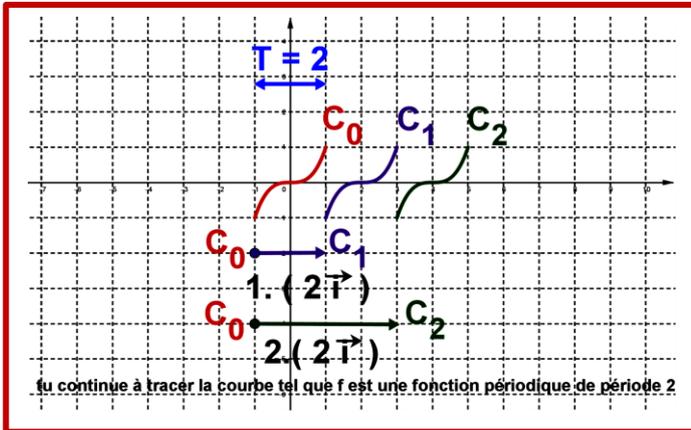
**3.** Quel propriété obtenue ?

**f.** La courbe d'une fonction périodique :

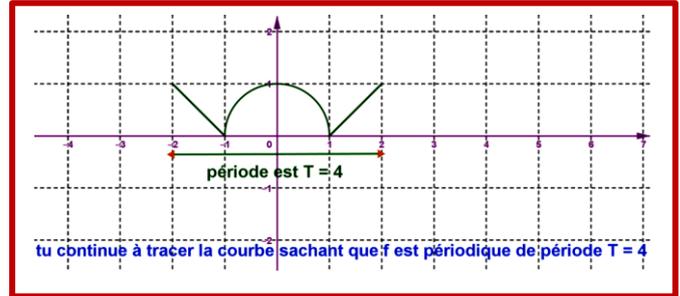
f est une fonction périodique de période T sur  $D_f$  .

- On considère les ensembles suivants :  $I_k = [a+kT, a+(k+1)T] \cap D_f$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  .  
(  $[a+kT, a+(k+1)T]$  est un intervalle de longueur T ) .
- $C_k$  les courbes représentative de f sur  $I_k$  .
- Pour construire les courbes  $C_k$  , on construit d'abord  $C_0$  sur  $I_0 = [a, a+T] \cap D_f$  .
- Puis on translate la courbe  $C_0$  par des translations de vecteurs  $\vec{u} = kT\vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  .
- Exemples :

**Exemple n° 1**



**Exemple n° 2**



**III. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée - extremums d'une fonction f :**

**A. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée :**

**a. Activité :**

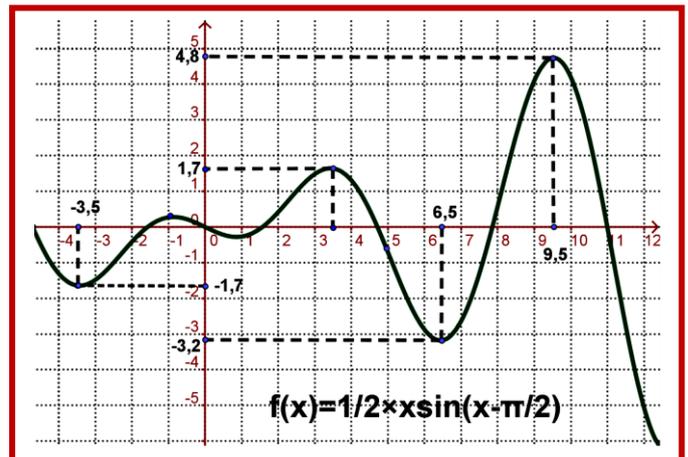
La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction f définie sur  $D_f$  .

Compléter par le symbole qui convient :

**1.**  $\forall x \in [-4;11] : f(x) \dots\dots 5 .$

**2.**  $\forall x \dots\dots [-4;11] : -4 \dots\dots f(x) .$

**3.**  $\forall x \in [\dots, \dots] : -4 \dots\dots f(x) \dots\dots 5 .$



**b. Vocabulaire :** on dit que :

- La fonction f est majorée par 5 sur  $[-4,11]$  ( ou par 6 ..... ) .
- La fonction f est minorée par -4 sur  $[-4,11]$  ( ou par -7 ..... ) .
- La fonction f est bornée 5 sur  $[-4,11]$  .

**c. Définitions :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $I$  ( $I \subset D_f$ ).  $M$  et  $m$  de  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est majorée par  $M$  sur  $I$  si et seulement si :  $\forall x \in I ; f(x) \leq M$  ( ou  $f(x) < M$  )
- La fonction  $f$  est minorée par  $m$  sur  $I$  si et seulement si :  $\forall x \in I ; m \leq f(x)$  ( ou  $m < f(x)$  )
- La fonction  $f$  est bornée par  $M$  sur  $I$  si et seulement si :  $f$  est majorée et minorée sur  $I$ .
- **Remarque :** (La fonction  $f$  est bornée sur  $I$ )  $\Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+ , \forall x \in I : |f(x)| \leq A)$ .

**d. Applications :**

❖  $f$  est une fonction tel que son tableau de variation ( ci-contre ) :

$x$	-3	0	5	9	$+\infty$
$f(x)$	-1	7	-14	-6	-12

**1.**  $f$  est elle majorée ?  $f$  est elle minorée ?

$f$  est elle bornée ? sur  $[-3, +\infty[$ .

**2.** Que représente 7 puis -14 pour la fonction  $f$  sur  $[-3, 11]$  ?

**3.** Que représente 7 puis -6 pour la fonction  $f$  ?

❖  $f$  est une fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $I = [1; +\infty[$ .

**1.** Montrer que :  $f$  est majorée par 1 sur  $I$ .

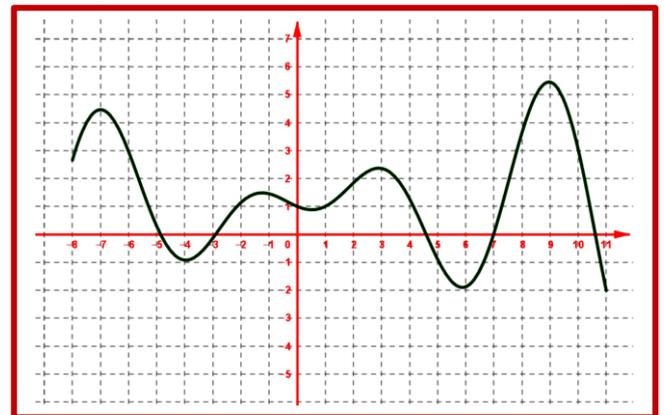
**2.** Montrer que :  $f$  est minorée sur  $I$ .

**3.** Est-ce que  $f$  est bornée sur  $I$ .

❖ La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction  $f$

**1.** Est-ce que  $f$  est majorée ?  $f$  est minorée ?

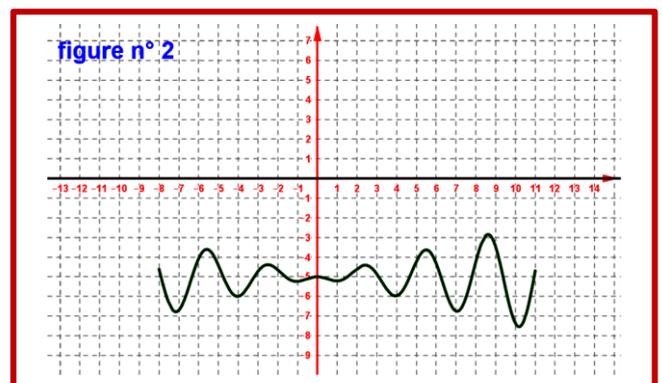
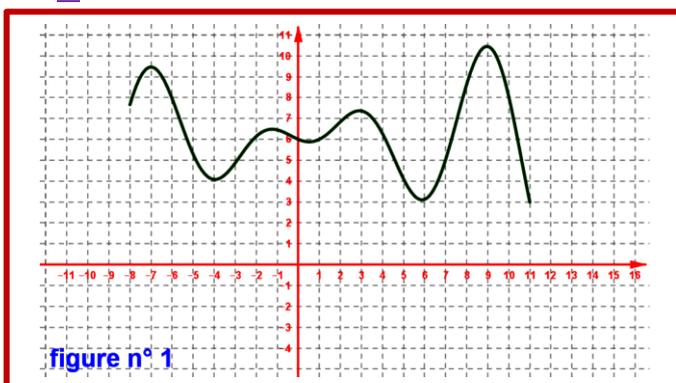
$f$  est bornée ? sur  $[-8, 11]$ .



**IV. Comparaison deux fonctions et interprétation géométrique**

**A. Fonction positive – fonction négative :**

**a. Activité :**



▪ La figure n° 1 représente une fonction positive sur  $[-8, 11]$ .

▪ La figure n° 2 représente une fonction négative sur  $[-8, 11]$ .

**1.** Quelle remarque peut-on tirer ?

**2.** Exprimer la remarque on utilise des symboles.

**b. Définition :**

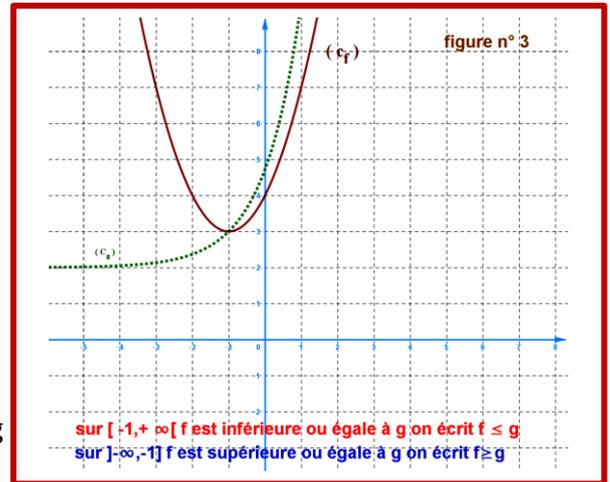
$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

- $f$  est une fonction positive sur  $D_f$  si et seulement si  $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$ . la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située au dessus de l'axe des abscisses .
- $f$  est une fonction strictement négative sur  $D_f$  si et seulement si  $\forall x \in D_f : f(x) < 0$  . la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située strictement au dessous de l'axe des abscisses .

**B. Comparaison de deux fonctions :**

**a. Activité :**

La figure ci-contre n° 3 présente la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $D_f$ .



- On dit que : la fonction  $f$  est inférieure ou égale à la fonction  $g$  sur  $]-1, +\infty[$  .
- On dit que : la fonction  $f$  est strictement supérieure à la fonction  $g$  sur  $]-1, +\infty[$  .

**1.** Exprimer les propositions présidentes par des symboles .

**2.** Que peut-on dire pour le cas de la fonction  $f$  est égale à  $g$

**b. Définition :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ .

- $(f \leq g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) \leq g(x))$  .  
la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située au dessous de la courbe de  $(C_g)$  de  $g$  sur  $I$ .
- $(f > g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) > g(x))$  .  
la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située strictement au dessus de la courbe de  $(C_g)$  de  $g$  sur  $I$ .
- $(f = g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) = g(x))$  .  
la courbe  $(C_f)$  de  $f$  et la courbe de  $(C_g)$  de  $g$  sont confondues sur  $I$ .

**V. Composée de deux fonctions :**

**a. Activité :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 3$  ;  $g(x) = x^2 + 1$  .

**1.** Déterminer  $D_f$  puis  $D_g$  .

**2.** Calculer  $f(1)$  ;  $g(5)$  ; puis écrire  $g(5)$  en fonction de  $f$  et  $1$  .

**3.** Calculer  $g(f(3))$  puis  $g(f(x))$  .

**b. Vocabulaire – notation :**

- La fonction  $h : x \mapsto h(x) = g(f(x))$  on la note par  $h = g \circ f$  d'où :  $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ .
- La fonction  $g \circ f$  est appelée la composée des fonction  $f$  et  $g$  dans cet ordre .
- On peut faire le diagramme suivant pour  $g \circ f$  :

$$h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)$$

**c. Définition :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$ .

On pose :  $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$ .

La fonction  $h$  définie sur  $D_{g \circ f}$  par  $h(x) = g(f(x))$  est appelée la composée des fonction  $f$  et  $g$  dans cet ordre et on note  $h = g \circ f$ .

**d. Application :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement par :  $f(x) = 2x^2 + 3x$  ;  $g(x) = 5x - 7$ .

**1.** Déterminer  $D_{g \circ f}$  puis  $D_{f \circ g}$ .

**2.** Calculer :  $g \circ f$  puis  $f \circ g$ .

**3.** Calculer :  $g \circ f(2)$  puis  $f \circ g(2)$ . que remarquez-vous ?

**VI. Monotonie de :  $f+c$  et  $c.f$  et  $f \circ g$  avec  $c$  de  $\mathbb{R}^*$  -  $g \circ f$  :**

**A. Monotonie de :  $f+c$  et  $c.f$  et  $f \circ g$  avec  $c$  de  $\mathbb{R}^*$ .**

**a. Activité :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $I$ .

$T_f$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur  $I$ .

**1.** Déterminer  $T_h$  le taux d'accroissement de la fonction  $h(x) = f(x) + c$  sur  $I$ . ( avec  $c \in \mathbb{R}$  ).

**2.** Déterminer  $T_g$  le taux d'accroissement de la fonction  $g(x) = c \times f(x)$  sur  $I$ . ( avec  $c \in \mathbb{R}$  ).

**3.** Donner la propriété obtenue.

**Correction :**

**1.** Calculons  $T_h$  :

Soient :  $x$  et  $x'$  de  $I$  tel que  $x' \neq x$ .

$$\text{On a : } T_h = \frac{h(x) - h(x')}{x - x'} = \frac{f(x) + c - (f(x') + c)}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = T_f.$$

D'où :  $T_h = T_{f+c} = T_f$

**Conclusion :**  $f$  et  $f+c$  varient dans le même sens sur  $I$  ( ont même sens de variation sur  $I$  ).

**2.** Calculons  $T_g$  :

Soient :  $x$  et  $x'$  de  $I$  tel que  $x' \neq x$ .

$$\text{On a : } T_g = \frac{g(x) - g(x')}{x - x'} = \frac{c \times f(x) - c \times f(x')}{x - x'} = \frac{c \times (f(x) - f(x'))}{x - x'} = c \times T_f. \text{ D'où } T_g = T_{c \times f} = c \times T_f$$

**Conclusion :**

- Si  $c > 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  varient dans le même sens sur  $I$ .
- Si  $c < 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  leurs variations sont opposées sur  $I$ .

**b. Propriété :**

$T_f$  est le taux d'accroissement d'une fonction  $f$  sur  $I$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

- Les fonctions  $f$  et  $f+c$  varient dans le même sens sur  $I$  ( ont même sens de variation sur  $I$  )
- . Si  $c > 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  varient dans le même sens sur  $I$ .
- Si  $c < 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  leurs variations sont opposées sur  $I$ .

**B. Monotonie de :  $g \circ f$** **a. Activité :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$  (c.à.d.

$$\forall x \in D_f ; f(x) \in D_g)$$

**1.** Montrer que si  $f$  et  $g$  varient dans le même sens respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est croissante sur  $D_f$ .

**2.** Montrer que si  $f$  et  $g$  leurs variations sont opposées respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est strictement décroissante sur  $D_f$ .

**3.** Donner la propriété obtenue.

**b. Propriété :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$ .

- si  $f$  et  $g$  ont même monotonie (**strictement monotone**) respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est croissante sur  $D_f$  ( **$g \circ f$  est strictement croissante sur  $D_f$** ).
- si  $f$  et  $g$  ont monotonie (**strictement monotone**) opposées respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est décroissante sur  $D_f$  ( **$g \circ f$  est strictement décroissante sur  $D_f$** ).

**c. Application :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement par :  $f(x) = |x| + 5$  et  $g(x) = x^2$ .

**1.** Déterminer  $D_f$  puis  $D_g$ .

**2.** Etudier la monotonie de  $f$  et  $g$ .

**3.** Déterminer la monotonie de  $g \circ f$  sur  $\mathbb{R}$  à travers un tableau.

**VII. Etude et représentation graphique de certain fonctions :****A. Etude et représentation graphique de  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  (polynôme du deuxième degré).****a. Activité :**

$f$  est une fonction définie par :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a$  et  $b$  et  $c$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ .

$$\text{On a : (1) : } f(x) = ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

$$\text{D'où : } f \left( -\frac{b}{2a} \right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : (1) } \Leftrightarrow f(x) &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + f \left( -\frac{b}{2a} \right) \\ &\Leftrightarrow f(x) - f \left( -\frac{b}{2a} \right) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 ; \text{ (2) .} \end{aligned}$$

1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

$$\text{(2) } \Rightarrow f(x) - f \left( -\frac{b}{2a} \right) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

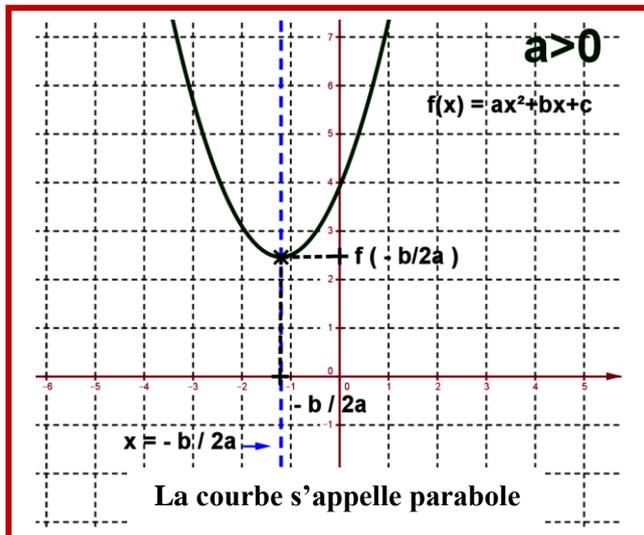
$$\Rightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) \leq f(x)$$

▪ Donc :  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  est la valeur minimale absolue pour  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

▪ Tableau de variation de  $f$  est :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\swarrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\searrow$		

▪ La courbe représentative de  $f$  est :



❖ **Vocabulaire :**

- $f(x) = ax^2 + bx + c$  ;  $a > 0$
- La courbe obtenue est appelée **parabole**, orienté vers le haut de **sommet**  $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ .
- Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation : (D) :  $y = -\frac{b}{2a}$

2<sup>ème</sup> cas  $a < 0$  :

$$(2) \Rightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

▪ Donc :  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  est la valeur maximale absolue pour  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

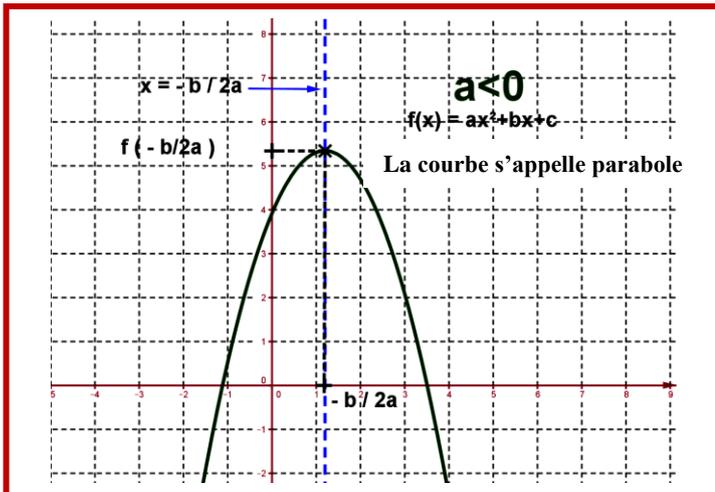
▪ Tableau de variation de  $f$  est :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\swarrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\searrow$		

▪ La courbe représentative de  $f$  est :

**Vocabulaire :**

- $f(x) = ax^2 + bx + c$  ;  $a < 0$
  - La courbe obtenue est appelée parabole , orienté vers le bas de sommet  $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ .
  - Son axe de symétrie est la droite (D)
- d'équation : (D) :  $y = -\frac{b}{2a}$



**b. Application :**

❖  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ .

- 1.** Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .
- 2.** Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3.** Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Correction :**

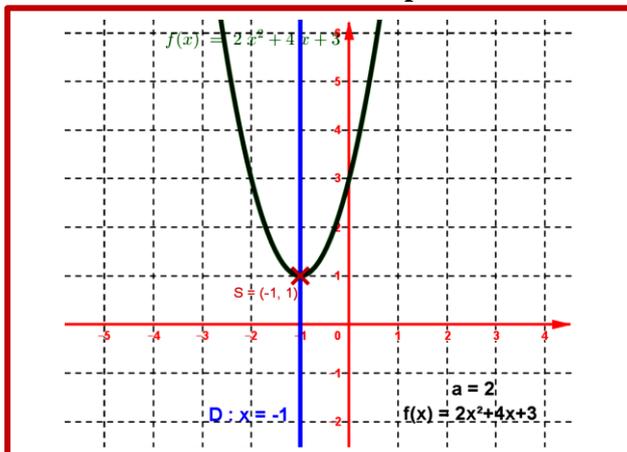
**1.** Les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .

- La courbe de  $f$  est appelée parabole , orienté vers le haut de sommet  $S(-1, 1)$ .
- Son axe de symétrie est la droite (D) d'équation : (D) :  $y = 2$ .

**2.** Le tableau de variation de  $f$ .

x	$-\infty$	<b>-1</b>	$+\infty$
f(x)	↘	<b><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-1) = 1</math></b>	↗

**3.** On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



❖  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = -x^2 + 4x$ .

**1.** Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .

**2.** Dresser le tableau de variation de  $f$  et Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

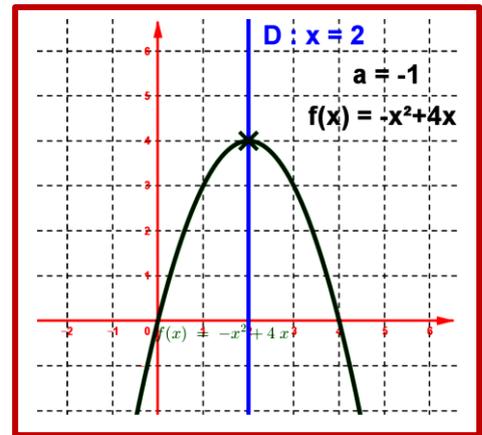
**Correction :**

**1.** Les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .

- La courbe de  $f$  est appelée parabole , orienté vers le bas de sommet  $S(2,4)$  .
- Son axe de symétrie est la droite  $(D)$  d'équation :  $(D) : y = -1$  .

**2.** Le tableau de variation de  $f$  et On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

x	$-\infty$	<b>2</b>	$+\infty$
f(x)	<b><math>f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 4</math></b>		
		↗	↘



**B. Etude et représentation graphique de  $(a \neq 0)$  ;  $f(x) = ax^3$  .**

**a. Activité :**

$f$  est une fonction définie par :  $f(x) = ax^3$  avec et  $a \neq 0$  .

- Ensemble de définition est  $D_f = \mathbb{R}$  .( car  $f$  est une fonction polynomiale ) .
- $f$  est une fonction impaire car  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$  .
- Ensemble de d'étude est :  $D_E = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$  .
- La monotonie de  $f$  : soient  $x$  et  $x'$  de  $D_E$  tel que  $x < x'$  on a (1) :  $x < x' \Rightarrow x^3 < (x')^3$

1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

$$(1) \Rightarrow ax^3 < a(x')^3$$

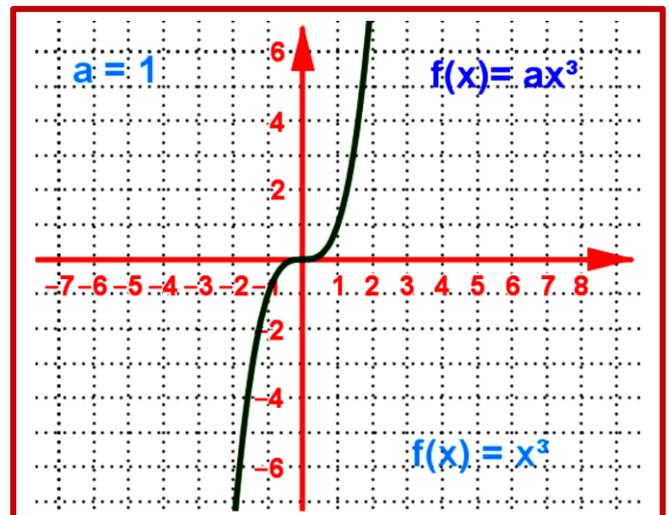
$$\Rightarrow f(x) < f(x')$$

D'où  $f$  est strictement croissante sur  $D_E = \mathbb{R}^*$

et aussi sur  $\mathbb{R}^-$  car la fonction est impaire .

- Le tableau de variation de  $f$
- et La courbe représentative de  $f$  est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗		
		0	
		↖	



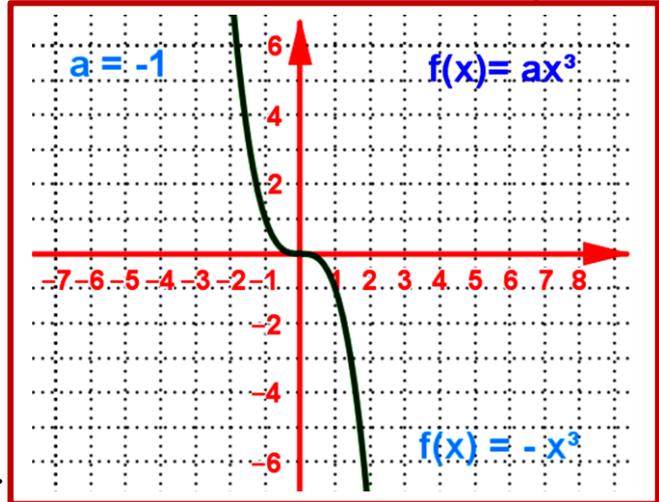
1<sup>er</sup> cas  $a < 0$  :

$$(1) \Rightarrow ax^3 > a(x')^3 \\ \Rightarrow f(x) > f(x')$$

D'où  $f$  est strictement décroissante sur  $D_E = \mathbb{R}^*$  et aussi sur  $\mathbb{R}^-$  car la fonction est impaire .

- Le tableau de variation de  $f$  et La courbe représentative de  $f$  est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)		0	



**b. Application :**

❖  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ .

**1.** Dresser le tableau de variation de  $f$  .

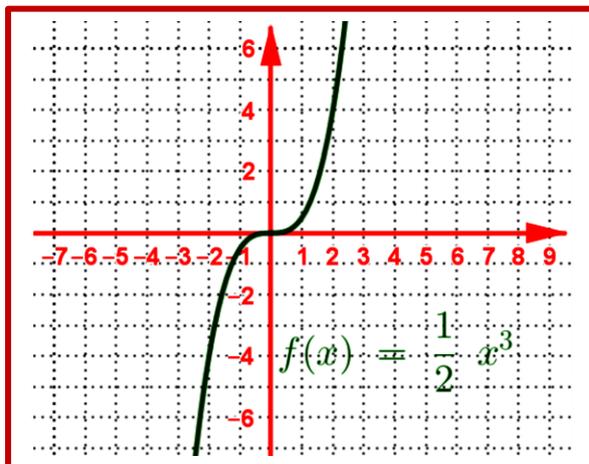
**2.** Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**Correction :**

**1.** Le tableau de variation de  $f$  est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)		0	

**2.** On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .



❖  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = -\frac{2}{3}x^3$ .

**1.** Dresser le tableau de variation de  $f$  .

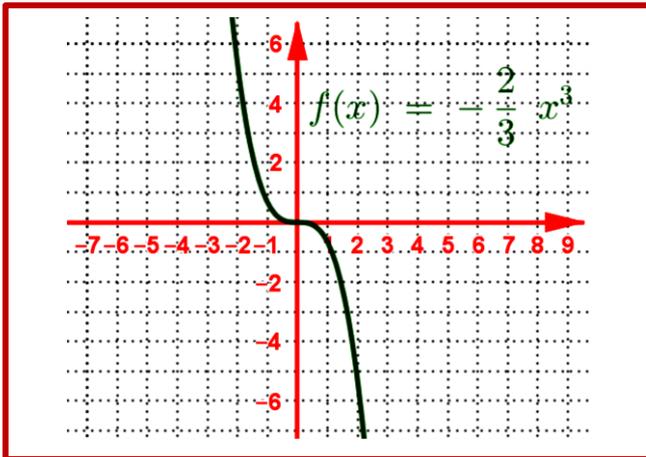
**2.** Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**Correction :**

**1.** Le tableau de variation de  $f$  est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↙	0	↘

**2.** On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



**C. Etude et représentation graphique de la fonction homographique :**  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ; ( $c \neq 0$ ).

▪ Ensemble de définition :

On a :

$$x \in D_f \Leftrightarrow cx + d \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$$

$$\text{D'où : } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} = \left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[ \cup \left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[ .$$

▪ La monotonie de  $f$  : soient  $x$  et  $x'$  de  $D_E$  tel que  $x \neq x'$ .

on a :

$$T_f = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} ; (x \neq x')$$

$$= \frac{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ax'+b}{cx'+d}}{x - x'}$$

$$= \frac{(ax+b)(cx'+d) - (ax'+b)(cx+d)}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$

$$= \frac{adx + bcx' - adx' - bcx}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$

$$= \frac{x(ad - bc) - x'(ad - bc)}{(cx + d)(cx' + d)(x - x')} = \frac{(ad - bc)(x - x')}{(cx + d)(cx' + d)(x - x')} = \frac{(ad - bc)}{(cx + d)(cx' + d)} = \frac{\Delta}{(cx + d)(cx' + d)} ; \left( \Delta = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)$$

- On a le signe de  $(cx + d)(cx' + d) > 0$  sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$  et de même sur  $\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$ .

D'où le signe de  $T_f$  est le signe de  $\Delta = ad - bc$  donc la monotonie de  $f$  sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$  et de même sur

$\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$  dépend du signe de  $\Delta = ad - bc$ .

1<sup>er</sup> cas  $\Delta = ad - bc > 0$  : donc  $T_f > 0$ .

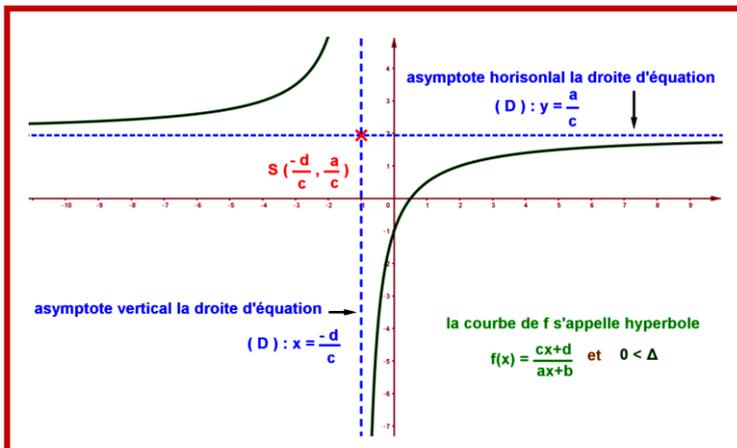
- D'où  $f$  est strictement croissante sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$  et aussi sur  $\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$ .

Le tableau de variation de  $f$  est :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f	↗		↗

$\Delta > 0$

La courbe représentative de  $f$  est :



❖ Vocabulaire :

$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} ; (c \neq 0) ; \Delta = ad - bc > 0$

La courbe obtenue est appelée hyperbole.

Son centre de symétrie est  $\Omega \left( -\frac{d}{c}, \frac{a}{c} \right)$ .

Asymptote verticale est la droite (D)

d'équation :  $D_v : x = -\frac{d}{c}$ .

Asymptote horizontale est la droite (D)

d'équation :  $D_h : y = \frac{a}{c}$

2<sup>ème</sup> cas  $\Delta = ad - bc < 0$  : donc  $T_f < 0$ .

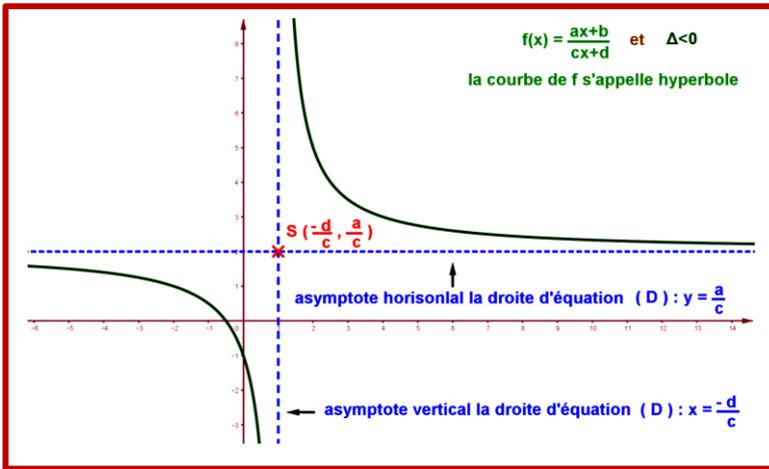
- D'où  $f$  est strictement décroissante sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$

et aussi sur  $\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$ .

Le tableau de variation de  $f$  est :

	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$\Delta < 0$	f(x)	↘		↘

- La courbe représentative de  $f$  est



❖ Vocabulaire :

- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ; ( $c \neq 0$ ) ;  $\Delta = ad - bc < 0$
- La courbe obtenue est appelée hyperbole .
- Son centre de symétrie de la courbe est  $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$  .
- Asymptote verticale est la droite (D) d'équation :  $D_v : x = -\frac{d}{c}$  .
- Asymptote horizontale est la droite (D) d'équation :  $D_h : y = \frac{a}{c}$  .

c. Application :

- $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$  .

- Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe ( $C_f$ ) de  $f$  .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  .
- Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

Correction :

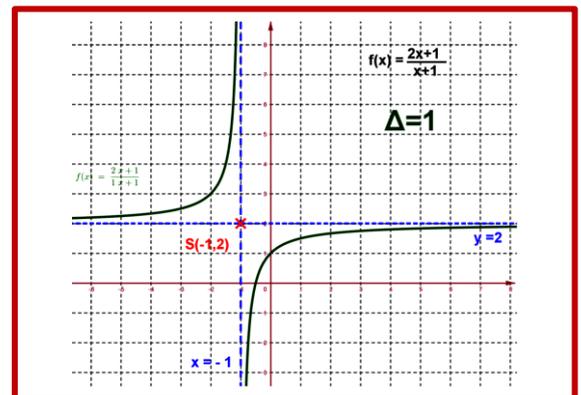
- Les éléments caractéristiques de la courbe ( $C_f$ ) de  $f$  .

- On a  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 > 0$
- La courbe de  $f$  est un hyperbole .
- Centre de symétrie est  $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right) = \Omega(-1, 2)$  .
- Asymptote verticale est la droite ( $D_v$ ) d'équation :  $D_v : x = -\frac{d}{c} = -1$  .
- Asymptote horizontale est la droite ( $D_h$ ) d'équation :  $D_h : y = \frac{a}{c} = 2$  .

- Le tableau de variation de  $f$  .

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c} = -1$	$+\infty$
f	↗		↗

$\Delta > 0$

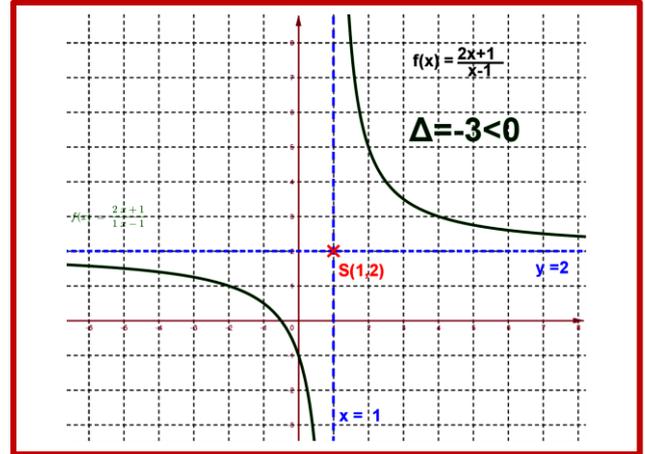


- On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

- f est une fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ .

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c} = 1$	$+\infty$
f(x)	↘		↘

$\Delta < 0$



**D. Etude et représentation graphique de la fonction  $f(x) = \sqrt{x+a}$  :**

- f est définie sur  $D_f = [-a, +\infty[$ .
- Monotonie de f sur  $D_f = [-a, +\infty[$ .  
soient x et x' de  $D_f = [-a, +\infty[$  tel que  $x < x'$ .

on a :

$$\begin{aligned} x < x' &\Rightarrow 0 \leq x+a < x'+a \\ &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x+a} < \sqrt{x'+a} \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) < f(x') \end{aligned}$$

D'où f est strictement croissante sur  $D_f = [-a, +\infty[$ .

- Le tableau de variation de f .

x	$-a$	$+\infty$
f(x)	0	↗

- La courbe représentative de f est :

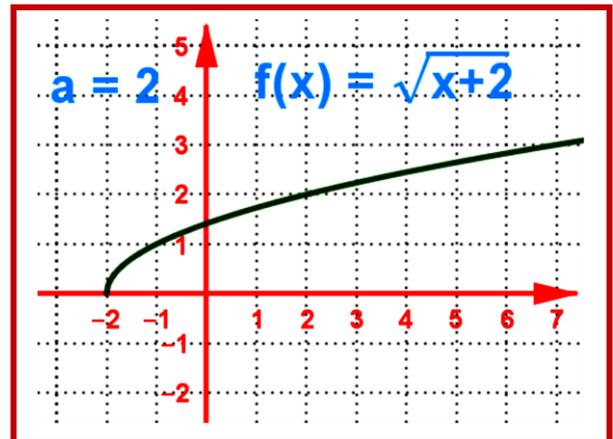
Cas :  $f(x) = \sqrt{a-x}$

- f est définie sur  $D_f = ]-\infty, a]$ .
- Monotonie de f sur  $D_f = ]-\infty, a]$ .  
soient x et x' de  $D_f = ]-\infty, a]$  tel que  $x < x'$ .

$$\begin{aligned} x < x' \leq a &\Rightarrow -a \leq -x < -x' \\ &\Rightarrow 0 \leq -x+a < -x'+a \\ &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{-x+a} < \sqrt{-x'+a} \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) < f(x') \end{aligned}$$

D'où f est strictement décroissante sur  $D_f = ]-\infty, a]$ .

- Le tableau de variation de f .
- La courbe représentative de f est :



x	$-\infty$	a
f(x)	0	↘

