

**PRODUIT SCALAIRE DANS  $\mathcal{V}_2$  Etude analytique (2)**

**-Applications- : cercle**

Dans tout ce qui va suivre le plan ( $\mathcal{P}$ ) est rapporté à un repère  $\mathcal{R}(\vec{O}; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé.

**I) EQUATION D'UN CERCLE**

**Définition** : Soient  $\Omega$  un point et  $r$  un réel positif, le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points  $M$  dans le plan ( $\mathcal{P}$ ) qui vérifient :  $\Omega M = r$  on le note,  $\mathcal{C}(\Omega, r) : \mathcal{C}(\Omega; r) = \{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r\}$

**1) Cercle défini par son centre et son rayon.**

**Propriété** : Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $r$  un réel positif, le cercle  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  à une équation cartésienne de la forme :  $\mathcal{C}(\Omega, r) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

**2) Equation réduite d'un cercle**

**Propriété 1** : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme :  $x^2 + y^2 + ax + \beta y + \gamma = 0$  où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des réels.

**Propriété 2** : Soit  $(C)$  L'ensemble des points

$M(x; y)$  du plan tel que :  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

avec  $a$ ;  $b$ ;  $c$  des réelles

• Si :  $a^2 + b^2 - c > 0$

alors  $(C)$  est une cercle de centre

$\Omega(a; b)$  et de rayon  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

• Si :  $a^2 + b^2 - c = 0$  alors  $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

• Si :  $a^2 + b^2 - c < 0$  alors  $(C) = \emptyset$

**3) Cercle définie par son diamètre.**

**Propriété** : Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre  $[AB]$  à pour équation :

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$$

Et :  $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

**4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle**

Soit  $ABC$  un triangle, les médiatrices du triangle  $ABC$  se coupent en  $\Omega$  le Centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$

**II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.**

**Définition** : Soit  $\mathcal{C}(\Omega; r)$  un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points  $M$  dans le plan qui vérifient  $\Omega M \leq r$  s'appelle la boule fermée de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ , il s'appelle aussi l'intérieur du cercle  $\mathcal{C}(\Omega; r)$

b) L'ensemble des points  $M$  dans le plan qui vérifient  $\Omega M > r$  s'appelle l'extérieur du cercle  $\mathcal{C}(\Omega; r)$

**Application** : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

**III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.**

**1) Propriété** : Soit  $\mathcal{C}(O; r)$  un cercle de rayon  $r$

strictement positif et  $(D)$  une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle  $\mathcal{C}(O; r)$  de  $(D)$ , il suffit de déterminer la distance de  $O$  à  $(D)$ . soit  $H$  la projection orthogonal de  $O$  sur  $(D)$

**a) Si  $d(O; (D)) = OH > r$**

La droite  $(D)$  est strictement à L'extérieur du cercle  $(C)$

$$(C) \cap (D) = \emptyset$$

**b)  $d(O; (D)) = OH = r$**

Puisque  $OH = r$  alors  $H$  est un point Commun entre  $(D)$  et  $(C)$ .

$(C) \cap (D) = \{H\}$  Ont dit que la droite  $(D)$  est tangente au cercle  $(C)$  en  $H$

**c)  $d(O, (D)) = OH < r$**

Dans ce cas le cercle  $(C)$  et la droite  $(D)$  se coupent en deux points  $M_1$  et  $M_2$  et  $H$  est le milieu du segment  $[M_1 M_2]$

**2) Droite tangente à un cercle.**

**2.1) Définition** : Une droite  $(D)$  est dite tangente à un cercle  $(C)$  s'ils se coupent en un seul point.

**2.2) Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.**

Soit  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  un cercle dans le plan où  $\Omega(a, b)$  et  $A$  l'un de ses points.

Soit la droite  $(T)$  la tangente à  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  en  $A$

$$M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$$

**Propriété** : Soient  $\Omega(a, b)$  un point et  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  un cercle dans le plan et  $A$  l'un de ses points. La droite  $(T)$  tangente à  $\mathcal{C}(\Omega, r)$  en  $A$  à pour équation :

$$(x-x_A)(y-y_A) + (a-x_A)(b-y_A) = 0$$

**.3) Equation paramétrique d'un cercle.**

l'équation paramétrique du cercle  $(C)$  de centre

$$\Omega(a, b) \text{ et de rayon } r \text{ est : } \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases} \alpha \in \mathbb{R}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

