

Chapitre 5

Applications du produit scalaire

I/ Équations de droites

a) Définition

Définition

Un vecteur non nul \vec{n} est dit normal à une droite d si la direction de \vec{n} est orthogonale à celle de d .

b) Propriétés

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1/ Une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.
- 2/ Étant donnés trois réels a , b et c où a et b ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Démonstration

- 1/ Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et soit $A(x_0; y_0) \in d$.

Soit $M(x; y)$, on a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$.

- 2/ Soit d l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$ et soit $A(x_A, y_A) \in d$.

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 = ax_A + by_A + c$

$$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la droite passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Exemple : Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3; -1)$ et $B(2; 4)$. Déterminer une équation de la médiatrice m de $[AB]$.

La médiatrice de $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc une équation de m est de la forme $-x + 5y + c = 0$.

De plus, $I\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \in m$ donc $-\frac{5}{2} + 5 \times \frac{3}{2} + c = 0$ donc $c = -5$.
Une équation de m est donc $-x + 5y - 5 = 0$.

II) Norme d'un vecteur.

Le réel $\vec{u} \cdot \vec{u}$, noté \vec{u}^2 est appelé **carré scalaire** de \vec{u}

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA} = OA^2$ est un nombre positif.

Définition 3.2. La norme d'un vecteur \vec{u} est le réel positif $\sqrt{\vec{u}^2}$ notée $\|\vec{u}\|$

Propriétés (De la norme).

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs, α un réel.

i) $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = 0$.

ii) $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \times \|\vec{u}\|$

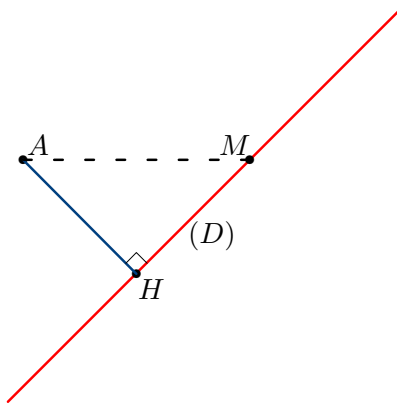
iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

III) Distance d'un point à une droite.

Soit (\mathcal{D}) une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projeté orthogonal sur (\mathcal{D}) .

Si M est un point quelconque de (\mathcal{D}) , $AM^2 = AH^2 + HM^2$; donc $AM^2 \geq AH^2$
c'est-à-dire $AM \geq AH$.

Ainsi la distance AH est le minimum des distances de A aux points de (\mathcal{D}) .



D'où la définition suivante.

Définition Soit (\mathcal{D}) une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projeté orthogonal sur (\mathcal{D}) .

Le nombre réel AH est appelé la distance du point A à la droite (\mathcal{D}) ; on le notera $d(A, (\mathcal{D}))$.

Théoreme. Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O . Soient (\mathcal{D}) une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et A un point de coordonnées (x_A, y_A) .

$$\text{Alors } d(A, (\mathcal{D})) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Démonstration.

Le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est normal à (\mathcal{D})

Puisque H appartient à (\mathcal{D}) , on a : $ax_H + by_H + c = 0$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AO} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{OH} \cdot \vec{n} \\ &= -ax_A - by_A + ax_H + by_H = -ax_A - by_A - c. \\ |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| &= |-ax_A - by_A - c|. \\ \|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| |\cos(\overrightarrow{AH}, \vec{n})| &= |ax_A + by_A + c|. \\ \|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| &= |ax_A + by_A + c|. \\ AH &= \frac{|ax_A + by_A + c|}{\|\vec{n}\|}. \\ AH = d(A, (\mathcal{D})) &= \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Remarque. Lorsque le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est unitaire, alors

$$AH = d(A, (\mathcal{D})) = |ax_A + by_A + c|.$$

Remarque.

Soit (\mathcal{D}) une droite du plan de vecteur normal unitaire \vec{n} , et A un point du plan.

Le réel

$$p_{\mathcal{D}}(A) = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}$$

est indépendant du choix de M sur la droite (\mathcal{D}) .

En effet si H est la projeté orthogonal de A sur (\mathcal{D}) , on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}.$$

On en déduit en outre, que $|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| = AH$ est la distance de A à (\mathcal{D}) .

IV/ Équations de cercles

a) Forme générale

Propriété

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal.

Une équation du cercle \mathcal{C} de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon R est

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2.$$

Exemple : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal.

Quelle est la nature de l'ensemble \mathcal{E} des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$?

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 2y + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5 \end{aligned}$$

\mathcal{E} est donc le cercle de centre $C(3; -1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b) Représentation paramétrique d'un cercle

Soit $I(a; b)$ un point du plan, $(a, b \in \mathbb{R})$, et r un réel strictement positif : on note $\mathcal{C}(I; r)$ le cercle de centre I et de rayon r . Soit $M(x; y)$ un point du plan.

Définition : Le système

$$\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une **représentation paramétrique** du cercle \mathcal{C} .
 t est le **paramètre**.

b) Cercle de diamètre donné

Propriété

On considère deux points A et B du plan. Le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} M = A \\ \text{ou } M = B \\ \text{ou } AMB \text{ est un triangle rectangle en } M \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Exemple : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal.

Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$ avec $A(2; 2)$ et $B(6; -2)$.

Soit $M(x; y)$. On a $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 2-x \\ 2-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 6-x \\ -2-y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (2-x)(6-x) + (2-y)(-2-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 12 - 8x + x^2 - 4 - 2y + 2y + y^2 = 0 \end{aligned}$$

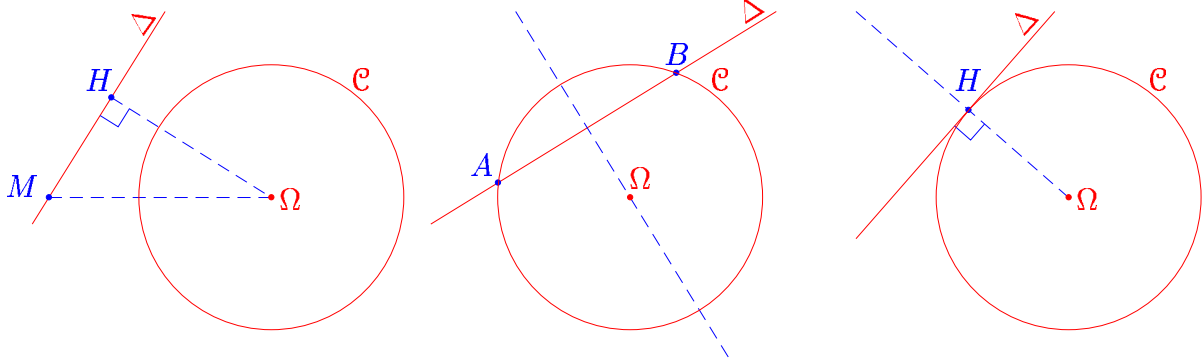
Une équation de \mathcal{C} est donc $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$.

V) Position relative d'une droite et d'un cercle

Proposition 0.2.1.

Soit une droite Δ et un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$.

- ◇ Si $d(\Omega, R) > R$, Δ et \mathcal{C} ne se rencontrent pas.
- ◇ Si $d(\Omega, R) < R$, Δ et \mathcal{C} ont exactement deux points communs.
- ◇ Si $d(\Omega, R) = R$, Δ et \mathcal{C} ont un seul point commun.



Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ : $d(\Omega, \Delta) = \Omega H$. Un point $M \in \Delta$ est sur \mathcal{C} si, et seulement si $\Omega M^2 = R^2$. Par le théorème de pythagore, on a:

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = d(\Omega, \Delta)^2 + HM^2,$$

et M appartient à \mathcal{C} si, et seulement si

$$HM^2 = R^2 - d(\Omega, \Delta)^2.$$

Il existe zéro, deux ou une solution à cette équation selon que le second membre est strictement négatif, strictement positif ou nul. ■

Vocabulaire: Dans le dernier cas, Δ est dite tangente au cercle en H ; elle est orthogonale au rayon du cercle.

Regardons analytiquement l'équation d'une tangente:

Proposition 0.2.2.

L'équation de la tangente au point de coordonnées (x_0, y_0) du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

est:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$$

Démonstration. La tangente est la droite passant par (x_0, y_0) et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M_0}$. Le centre Ω a pour coordonnées (a, b) , ainsi le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_0}$ a pour composante $(x_0 - a, y_0 - b)$. Sont équation est donc

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$xx_0 - ax - x_0^2 + ax_0 + yy_0 - by - y_0^2 + by_0 = 0,$$

donc:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - x_0^2 - y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 = 0,$$

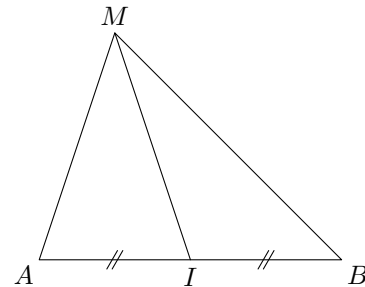
et compte tenu du fait que l'on a $x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$, on obtient la formule de l'énoncé.

VI/ Longueurs et angles dans un triangle

a) Théorème de la médiane

On considère deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[AB]$ donc $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

$$\text{Ainsi } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

Exemple : ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$. Calculer AI où I est le milieu de $[BC]$.

D'après le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

$$\text{On a donc } 2AI^2 = 6^2 + 8^2 - \frac{1}{2} \times 12^2 = 28.$$

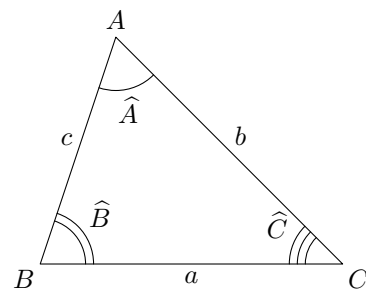
$$\text{Ainsi } AI = \sqrt{14}.$$

b) Formules d'Al Kashi

Propriété

On considère un triangle ABC . On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$. On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C}) \end{aligned}$$



Démonstration

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \text{Ainsi } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \text{ soit } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A}) \end{aligned}$$

Exemple : ABC est un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 5$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC .

D'après la formule d'Al Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\hat{A}) = 5^2 + 9^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 61$$

$$\text{Ainsi } BC = \sqrt{61}$$

c) Aire d'un triangle

On considère un triangle ABC et on appelle S son aire. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$S = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}ac \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$$

Démonstration

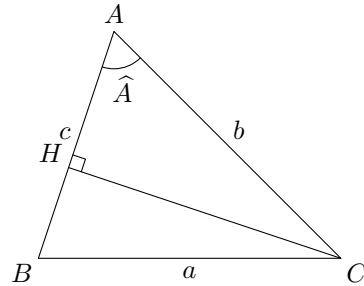
Soit H le projeté orthogonal de C sur AB . On a

$$\text{alors } S = \frac{1}{2}AB \times CH.$$

Si l'angle \hat{A} est aigu alors $CH = AC \sin(\hat{A})$.

Si l'angle \hat{A} est obtus alors $CH = AC \sin(\pi - \hat{A}) = AC \sin(\hat{A})$

Dans tous les cas $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\hat{A})$.



d) Formule des sinus

On considère un triangle ABC . Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

Démonstration

$$\text{On a } S = \frac{1}{2}bc \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2}ac \sin(\hat{B}) = \frac{1}{2}ab \sin(\hat{C})$$

$$\text{donc } \frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\hat{A})}{a} = \frac{\sin(\hat{B})}{b} = \frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

$$\text{ainsi } \frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}.$$

Exemple : ABC est un triangle tel que $BC = 5$, $\hat{B} = 50^\circ$ et $\hat{C} = 75^\circ$. Calculer AB et AC et donner les valeurs arrondies au dixième.

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 55^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin(\hat{C})} = \frac{AC}{\sin(\hat{B})} = \frac{BC}{\sin(\hat{A})} \Leftrightarrow \frac{AB}{\sin(75^\circ)} = \frac{AC}{\sin(50^\circ)} = \frac{5}{\sin(55^\circ)}$$

$$\text{On a donc } AB = \frac{5 \sin(75^\circ)}{\sin(55^\circ)} \simeq 5,9 \text{ et } AC = \frac{5 \sin(50^\circ)}{\sin(55^\circ)} \simeq 4,7.$$