# Mouvement parabolique dans un champ gravitationnel

**Compétences travaillées dans ce TP**

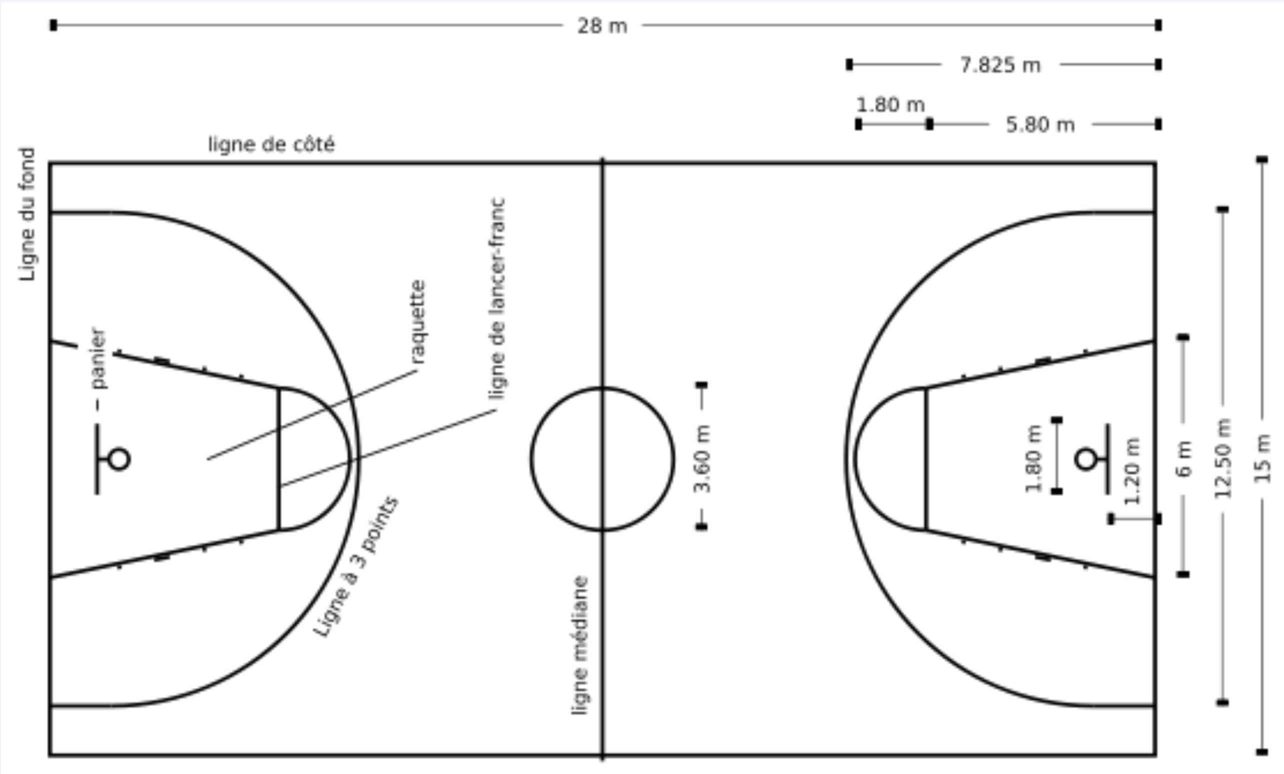
| Compétences | Niveau Validé |
|---|---|
| **Analyser** : Exploitation des graphiques obtenus. | A B C D |
| **Réaliser** : Mettre en œuvre une démarche expérimentale pour étudier un mouvement. Pointage vidéo. Manipulations d'équation. | A B C D |
| **Mobiliser et Exploiter ses connaissances** : Description du mouvement : position, vitesse, accélération. | A B C D |
| **Valider** : Commenter les valeurs expérimentales obtenues. | A B C D |

**Contexte** A l'INSEP, des biomécaniciens étudient le shoot au lancer franc d'un basketteur à l'aide de vidéos. On se propose ici de modéliser mathématiquement la trajectoire du ballon lors d'un lancer franc ainsi que les paramètres dont elle dépend.

## I. Documents

**Document n° 1** : Extrait de la vidéo d'un lancer franc au basketball

**Document n° 2** : Dimensions d'un terrain de basketball




## II. Pointage vidéo

Nous allons utiliser le logiciel Avimeca pour faire un pointage vidéo de la trajectoire d'un objet, c'est à-dire récupérer les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de sa trajectoire en fonction du temps.
Voici comment faire :

1. Ouvrir le logiciel Avimeca.
2. Charger le clip désiré dans le répertoire physique.
3. Modifier la taille pour l'agrandir au format de la fenêtre (utiliser adapter).
4. Onglet **Etalonnage** : étalonner les longueurs (origine et échelle verticale).
5. Onglet **Mesures** : vérifier les paramètres en bas :
6. Pointer soigneusement les positions successives du centre d'inertie de la balle. Le tableau des mesures (coordonnées $x$ et $y$ du centre d'inertie par rapport au repère choisi) apparaît à droite de l'écran.
7. Enregistrer le tableau de valeurs sous le format Régressi.rw3.

## III. Graphiques

1. Rajouter 2 colonnes dans Regressi pour calculer $v_x(t)$, $v_y(t)$ et $v$.
2. Tracer 3 graphes : $v_x$ et $v_y = f(t)$ ; $x$ et $y = f(t)$ ; $y = f(x)$ (avec axes, légendes etc). Pour chaque cas, demander l'équation de la courbe de tendance.
3. Mettre en page et imprimer tableau et graphes (un exemplaire par groupe).

## IV. Exploitation

1. **Vitesse initiale :**
   Trouver à l'aide des graphes les coordonnées $v_{0x}$ et $v_{0y}$ du vecteur $\overrightarrow{v}_0$ et en déduire sa valeur $v_0$ .

   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................

2. **Angle de tir :**
   Trouver la valeur de cet angle $\alpha$ (angle avec l'horizontale).

   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................

3. **Graphiques :**
   A quel instant la balle passe-t-elle au sommet de sa trajectoire ? Comment est orienté le vecteur $\overrightarrow{v}_S$.
   Vérifier que $v_S = v_{x_S}$.
   Trouver les coordonnées $x_S$ et $y_S$ du sommet de la trajectoire.

   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................
   ........................................................................................................................

4. **Equations horaires :**
Retrouver, par le calcul, l'instant de passage au sommet de la trajectoire.
Calculer les coordonnées $x_S$ et $y_S$ du sommet de la trajectoire et comparer aux résultats précédents.

5. **Equation cartésienne :**
Vérifier, par le calcul, les valeurs des coefficients de l'équation $y = f(x)$ donnée par Regressi.

# V. Mouvement d'un objet dans un champ gravitationnel

- **Référentiel :** terrestre supposé galiléen le temps du lancer.
- **Système :** le solide considéré (un ballon de basket par exemple).
- **Bilan des actions extérieures :** nous considérons la chute libre, c'est-à-dire que seul le poids agit sur le système (la poussée d'Archimède et les frottements dûs à l'air sont négligés.)
- **Application de la deuxième loi de Newton :**

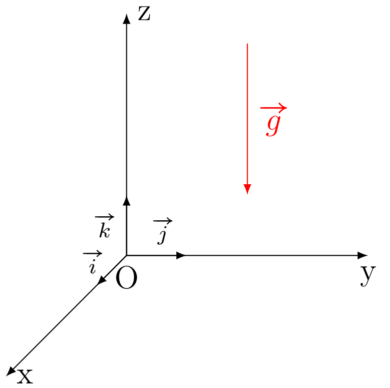
$$\vec{P} = m\vec{a}$$

Causes — Conséquences

Deux vecteurs sont **égaux** si leurs **coordonnées** sont **égales**.
Dans le référentiel terrestre orthonormé, l'équation précédente s'écrit :

$$\vec{P}\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = m\vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = m\vec{g}\begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}$$

1. **Equations horaires**




La projection du vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ permet d'obtenir ses coordonnées.

$$\begin{cases} a_x = g_x = 0 \\ a_y = g_y = 0 \\ a_z = g_z = -g \end{cases}$$

Pour trouver les coordonnées du vecteur vitesse, il faut intégrer les équations :

$$\begin{cases} v_x(t) = a_x t + v_{0x} = v_{0x} \\ v_y(t) = a_y t + v_{0y} = v_{0y} \\ v_z(t) = a_z t + v_{0z} = -gt + v_{0z} \end{cases}$$

Ces équations sont valables pour toutes les dates et en particulier à la date $t = 0$ s, donc : $\begin{cases} v_x(0) = v_{0x} \\ v_y(0) = v_{0y} \\ v_z(0) = v_{0z} \end{cases}$
qui sont les coordonnés du vecteur vitesse à $t = 0$ s, obtenues par projections du vecteur vitesse $\vec{v_0}$ sur les trois axes.

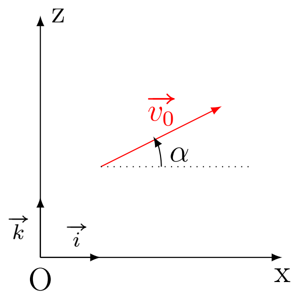
Il faut intégrer une nouvelle fois pour trouver les équations horaires des coordonnées du vecteur position :

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t + x_0 \\ y(t) = v_{0y}t + y_0 \\ z(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_{0z}t + z_0 \end{cases}$$

où $\begin{cases} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{cases}$ sont les coordonnées de la position à $t = 0$ s.

**Comment simplifier un peu ces équations ?**

Comme chacun sait, un vecteur porté par une droite, appartient à un plan.
Ainsi, le physicien peut choisir le repère d'étude de manière à ce que le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ soit dans un plan simple, par exemple le plan $y(t) = 0$, c'est-à-dire :




$$\begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos\alpha \\ v_{y0} = 0 \\ v_{z0} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Ainsi, les équations :

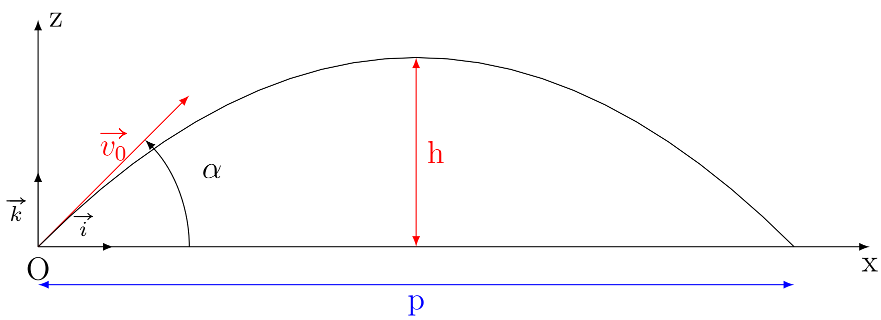
On a :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = a_y t + v_{0y} = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Cela devient :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t + x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha t + z_0 \end{cases}$$

2. La **trajectoire** est le chemin suivi par le centre d'inertie du solide indépendamment de la date.
   Il faut donc éliminer le temps des équations pour obtenir une équation de la forme $z = f(x)$.
   D'après (1), $t = \dfrac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha}$ qu'il suffit de remplacer dans $z(t)$ :
   $$z(x) = -g\frac{(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} + (x - x_0)\tan\alpha + z_0$$
3. La **portée** est distance horizontale parcourue par le solide pour la même altitude que le point de lancement.
   Le plus simple est de choisir $z_0 = 0$ ce qui implique que pour $z(x) = 0$ on obtient :
   soit $x = 0$, soit $x_p = p = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$
4. La **flèche** est l'altitude la plus élevée par rapport au point de lancement.
   Un extrêmum est obtenu lorsque la dérivée de la fonction s'annule, donc, la flèche est atteinte quand $\dfrac{dz}{dx} = 0$, soit $h = z_{max} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$




Fin