Correction du DST

Exercice 1 La chute des boulets (14 points)

1/ On applique l'équation horaire $x = \frac{1}{2}gt^2$:

$$x_1 = \frac{1}{2}g\tau^2 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}g(2\tau)^2 = \frac{4}{2}g\tau^2 \quad ; \quad x_3 = \frac{1}{2}g(3\tau)^2 = \frac{9}{2}g\tau^2$$

2/ On utilise les expressions précédentes :

$$h_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{2}g\tau^2 - 0 = \frac{1}{2}g\tau^2$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}g\left(4\tau^2 - \tau^2\right) = \frac{3}{2}g\tau^2$$
$$h_3 = x_3 - x_2 = \frac{1}{2}g\left(9\tau^2 - 4\tau^2\right) = \frac{5}{2}g\tau^2$$

On peut alors exprimer chaque hauteur en fonction de h_1 :

$$h_1 = \frac{1}{2}g\tau^2$$
$$h_2 = \frac{3}{2}g\tau^2 = 3h_1$$
$$h_3 = \frac{5}{2}g\tau^2 = 5h_1$$

3/ Oui, on retrouve la suite des hauteurs de chute annoncée par Galilée.
Ainsi, partant de l'instant initial $t = 0$, le corps en chute parcourt la distance h_1 pendant la durée τ ; pendant la même durée supplémentaire, il parcourt la distance $h_2 = 3h_1$, puis encore dans la même durée une distance $h_3 = 5h_1$. Finalement, pour des temps τ égaux, la distance parcourue est la suite arithmétique de raison $2h_1$ et de premier terme h_1, tel qu'annoncé par Galilée.

4/ La proposition **a** n'est à mettre au crédit d'aucun de nos deux illustres scientifiques, quoique Aristote fût plutôt considéré en son temps comme un mathématicien et un philosophe (donc un métaphysicien, de méta : « avant »), que comme un scientifique ;
La proposition **b** correspond à l'affirmation d'Aristote — il ne basait pas ses affirmations sur l'expérience, contrairement à Galilée ;
La proposition **c** correspond à l'affirmation de Galilée.
Lors de Bac ces trois réponses ont été notées en « tout ou rien ».

5/ Expression de la durée Δt de la chute en fonction de la hauteur H de chute :

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \tfrac{1}{2}g\Delta t^2 &= H \\ \Leftrightarrow \quad g\Delta t^2 &= 2H \\ \Leftrightarrow \quad \Delta t^2 &= \tfrac{2H}{g} \\ \Leftrightarrow \quad \Delta t &= \sqrt{\tfrac{2H}{g}} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \times 57}{9,8}} = 3,4 \text{ s}$$

L'extrait n°2 annonce un temps de 5 s. La différence en pourcentage constatée est de :

$$\frac{5 - 3,4}{3,4} = 47\,\%$$

Elle peut provenir du fait que l'équation horaire utilisée pour le calcul n'est valable que dans le cas d'une chute libre, alors que Galilée ne disposait pas des moyens techniques permettant de créer le vide d'air (1654 et Otto von Guericke pour le premier vide), ou tout au moins d'obtenir des frottements négligeables dans un vide partiel, et encore moins de chronométrer les temps de manière précise.

6/ Loi de l'action et de la réaction, ou troisième loi de Newton : Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction, mais de sens opposés, exercée par le corps B. La force de poussée exercée par l'ensemble { galiote + canon + gaz } est égale et opposée à la réaction exercée par le système { boulet }.

7/

7.1/ Poussée d'Archimède : égale et opposée au poids du fluide déplacé, ici l'air, de masse volumique ρ_{air}, avec V pour le volume déplacé :

$$\overrightarrow{F}_{\text{A}} = -\rho_{\text{air}} V \overrightarrow{g}$$

En intensité :

$$F_{\text{A}} = \rho_{\text{air}} V g$$
$$F_{\text{A}} = 1,29 \times 12,7 \times 10^{-3} \times 9,8 = 0,16 \text{ N}$$

7.2/ Poids :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$$

Intensité :

$$P = mg = 100 \times 9,8 = 9,8 \times 10^{2} \text{ N}$$

7.3/ Rapport des intensités :

$$\frac{P}{F_{\text{A}}} = \frac{9,8 \times 10^{2}}{0,16} = 6,1 \times 10^{4}$$

Ce rapport est supérieur à 100. On est bien dans le cas où l'on peut négliger la poussée d'Archimède.

7.4/ Bilan des forces sur le système {boulet} : poids $\overrightarrow{P}$. Toutes les autres forces sont négligeables, conformément aux questions précédentes. Il s'agit donc d'une chute libre.

8/ Deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} &= m\overrightarrow{a}_{\text{G}} \\ \Rightarrow \quad \overrightarrow{P} &= mg = m\overrightarrow{a}_{\text{G}} \\ \Rightarrow \quad \overrightarrow{a}_{\text{G}} &= \overrightarrow{g} \end{aligned}$$

Projection dans le repère $(\text{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$a_{\text{G}} = \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right.$$

Intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v}_{\text{G}} = \left| \begin{array}{l} \dot{x} = v_{0\,x} \\ \dot{y} = -gt + v_{0\,y} \end{array} \right.$$

Conditions initiales : $\overrightarrow{v}_{\text{G}}(t = 0) = \overrightarrow{v}_0$

$$v_{0\,x} = v_0 \cos\alpha \text{ et } v_{0\,y} = v_0 \sin\alpha$$

$$\overrightarrow{v}_{\text{G}} = \left| \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$$

Seconde intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OG} = \begin{vmatrix} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t + y_0 \end{vmatrix}$$

Conditions initiales : G en O à $t = 0$

$$x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0$$

$$OG = \begin{vmatrix} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t \end{vmatrix}$$

9/ Eliminons t en l'exprimant à l'aide de $x(t)$:

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Remplaçons dans l'expression de $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)\, x$$

Identification avec la solution proposée par l'énoncé :

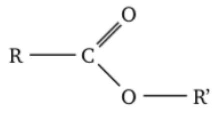
$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \\ B = \tan\alpha \end{cases}$$

Analyse dimensionnelle :

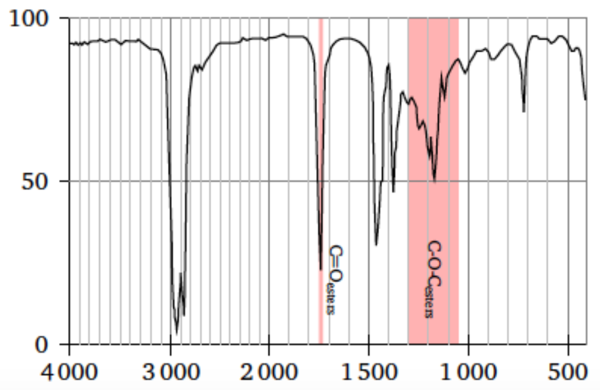
$$\begin{cases} [A] = \frac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{(\mathrm{m \cdot s^{-1}})^2} = \frac{\mathrm{m \cdot s^{-2}}}{\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}} = \mathrm{m^{-1}} \\ [B] = \text{sans unité} \end{cases}$$

Exercice 2 La cire d'abeille (6 points)

1/ Formule générale d'un ester :

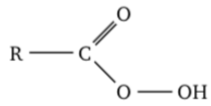


où R' est un groupe alkyle, et R un groupe alkyle ou éventuellement un hydrogène.

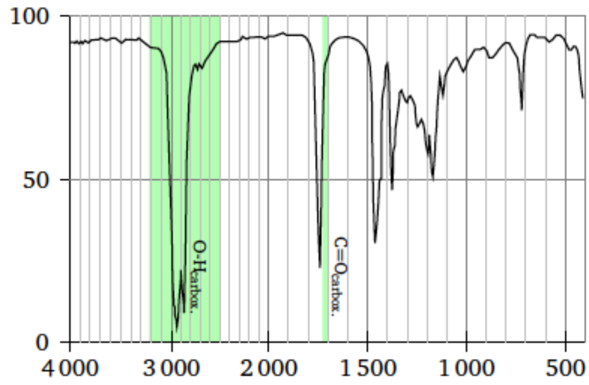


Si un ester est présent dans l'échantillon, on aura une bande intense entre 1 735 et 1 750 $\mathrm{cm^{-1}}$, caractéristique du C=O des esters, ainsi qu'une autre bande intense entre 1 050 et 1 300 $\mathrm{cm^{-1}}$, caractéristique de C-O-C.

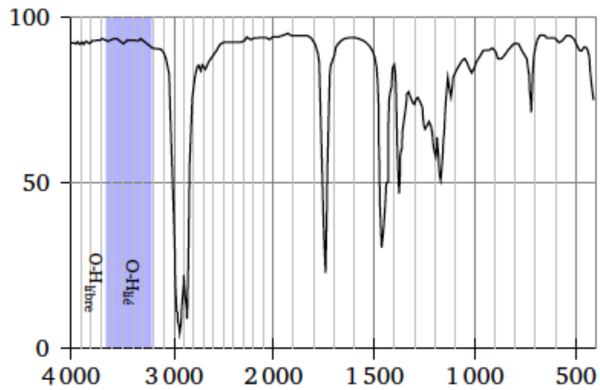
2/ Formule générale d'un acide carboxylique :



où R est un groupe alkyle ou éventuellement un hydrogène.



Si un acide carboxylique est présent dans l'échantillon, on aura une bande intense et large entre 2 500 et 3 200 cm^{-1} pour le O-H, et une bande intense entre 1 700 et 1 725 cm^{-1} pour le C=O.
Formule générale d'un alcool : R-OH, où R est un groupe alkyle.



Si un alcool est présent, on aura éventuellement une bande intense et fine entre 3 590 et 3 650 cm^{-1} pour le O-H libre, et une bande moyenne et large entre 3 200 et 3 600 cm^{-1} pour le O-H lié.

3/ On constate que le spectre ne présente aucune bande caractéristique des alcools O-H. Une bande caractéristique du C=O est présente, il s'agit précisément du C=O d'un ester. L'ester du miel a été conservé tel que, il n'a pas été hydrolysé en alcool et en acide carboxylique, le miel a donc été conservé en milieu sec.

Fin