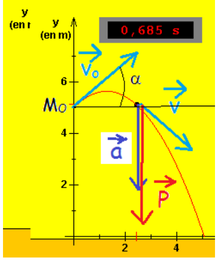
Chapitre 6: application de lois de Newton et de Kepler

1) Quand peut-on dire qu'un champ de pesanteur est uniforme ?

2) A l'aide de la seconde loi de Newton déterminer l'expression du vecteur accélération au cours du mouvement d'un objet de masse m soumis à une unique force, son poids (mouvement dit de chute libre). Comment appelle-t-on ce mouvement ?



3) Conditions initiales, à t = 0 les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

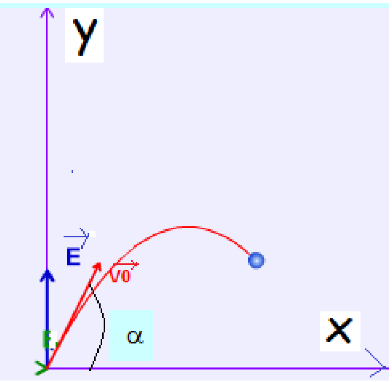
$$\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}; \quad \vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{x_0} = v_0.\cos\alpha \\ v_{y_0} = v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Déterminer les équations horaires du mouvement $a_x(t)$, $a_y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré dans un champ de pesanteur uniforme.

4) A partir des équations horaires de position déterminer l'équation de la trajectoire

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0.\cos\alpha.t + x_0 \\ y = -\dfrac{g.t^2}{2} + v_0.\sin\alpha.t + y_0 \end{vmatrix}$$

5) A l'aide de la seconde loi de Newton, déterminer la valeur de l'accélération d'une particule de masse M, supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m, placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$. On négligera toutes les forces sauf la force électrique. Quel est le nom de ce type de mouvement ?



6) Déterminer les équations horaires du mouvement d'une particule de masse M, supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m, placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$

$(\vec{a} = \dfrac{q}{m}.\vec{E})$

Conditions initiales, à t = 0 les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

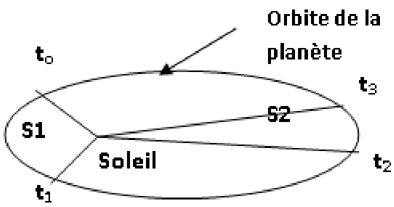
$$\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{x_0} = v_0.\cos\alpha \\ v_{y_0} = v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

7) Déterminer l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre, de masse m_T, sur un satellite de masse m, en mouvement circulaire uniforme dans le référentiel géocentrique. Le satellite est situé à une altitude h , le rayon de la Terre est noté R_T. L'expression vectorielle sera exprimée dans la base de Frénet $((\vec{u_n}, \vec{u_T})$. Donner les unités de chacun des termes.

8) Déterminer l'expression du vecteur accélération du centre d'inertie d'un satellite de la Terre, dont la masse est notée m, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

9) Sachant que le vecteur accélération d'un satellite de la Terre vaut : $\vec{a} = \dfrac{G.m_T}{R^2}.\vec{n}$ démontrer que, si le mouvement est circulaire, alors la vitesse est constante. Donner l'expression de la norme de la vitesse.

10) Déterminer l'expression de la période de révolution T d'un satellite de la Terre connaissant sa vitesse $v = \sqrt{\dfrac{G.m_T}{R}}$ (R : rayon de l'orbite et m_T, masse de la Terre.



11) Enoncer les 3 lois de Kepler.

1) Quand peut-on dire qu'un champ de pesanteur est uniforme ?

Un champ de pesanteur est uniforme si en chaque point de l'espace le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ est constant.

C'est le cas dans un cube d'environ 1 km d'arrête au voisinage de la Terre.

2) A l'aide de la seconde loi de Newton déterminer l'expression du vecteur accélération au cours du mouvement d'un objet de masse m soumis à une unique force, son poids. Comment appelle-t-on ce mouvement ?

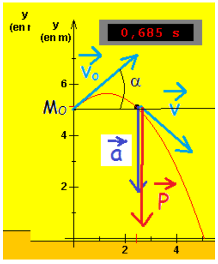
$$\Sigma \vec{F}ext = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse ne variant pas au cours du mouvement on peut la sortir de la dérivée:

$$\Sigma \vec{F}ext = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(.\vec{v})}{dt} = m.\vec{a} = \vec{P} = m.\vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Le vecteur accélération est constant, le mouvement est uniformément accéléré.



3) Conditions initiales, à t = 0 les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{v_0}\begin{vmatrix} v_{x0} = v_0.\cos a \\ v_{y0} = v_0.\sin a \end{vmatrix}$$

Déterminer les équations horaires du mouvement $a_x(t)$, $a_y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x(t)$ et $y(t)$ dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré dans un champ de pesanteur uniforme.

Détermination des équations horaires des coordonnées du vecteur accélération.

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix} = \vec{g}\begin{vmatrix} g_x \\ g_y \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = g_y = -g = -9{,}8\,m\,s^{-2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = C_1 = \text{cons tan te} \\ -g = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = -g.t + C_2(\text{cons tan te}) \end{vmatrix}$$

les constantes C_1 et C_2 sont déterminées avec les conditions initiales:

$$\begin{vmatrix} v_x = C_1 = v_x(0) = v_0.\cos a \\ v_y(0) = -g.0 + C_2(\text{constan te}) = v_0.\sin a \end{vmatrix}$$

$$C_2 = v_0.\sin a$$

Les coordonnées du vecteur vitesse sont:

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0.\cos a \\ v_y = -g.t + v_0.\sin a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0.\cos a \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -g.t + v_0.\sin a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x = v_0.\cos a.t + C_3 \\ y = \frac{-g.t^2}{2} + v_0.\sin a.t + C_4 \end{vmatrix}$$

les constantes C_3 et C_4 sont déterminées avec les conditions initiales:

$$\begin{vmatrix} x(0) = v_0.\cos \alpha.0 + C_3 = x_0 \Rightarrow C_3 = x_0 \\ y(0) = -\frac{g.0^2}{2} + v_0.\sin\alpha.0 + C_4 = y_0 \Rightarrow C_4 = y_0 \end{vmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur position sont:

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0.\cos a.t + x_0 \\ y = -\frac{g.t^2}{2} + v_0.\sin a.t + y_0 \end{vmatrix}$$

4) A partir des équations horaires de positions déterminer l'équation de la trajectoire

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0.\cos a.t + x_0 \\ y = -\frac{g.t^2}{2} + v_0.\sin a.t + y_0 \end{vmatrix}$$

L'équation de la trajectoire est la relation qui lie l'ordonnée à l'abscisse du point M: y = f(x). Pour la déterminer on utilise les équations horaires de la trajectoire, x(t) et y(t). On exprime l'instant t en fonction de x dans la première équation et on réinjecte sa valeur dans la seconde.

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0.\cos a.t + x_0 \\ y = -\frac{g.t^2}{2} + v_0.\sin a.t + y_0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} t = (\frac{x - x_0}{v_0.\cos a}) \\ y = -\frac{g.(\frac{x - x_0}{v_0.\cos a})^2}{2} + v_0.\sin a.(\frac{x - x_0}{v_0.\cos a}) + y_0 \end{vmatrix}$$

L'équation de la trajectoire est:

$$y = -\frac{g.(\frac{x - x_0}{v_0.\cos a})^2}{2} + \tan a.(x - x_0) + y_0$$

5) A l'aide de la seconde loi de Newton, déterminer la valeur de l'accélération d'une particule de masse M, supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m, placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$. On négligera toutes les forces sauf la force électrique. Quel est le nom de ce type de mouvement ?

Dans le référentiel galiléen la seconde loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique s'écrit:

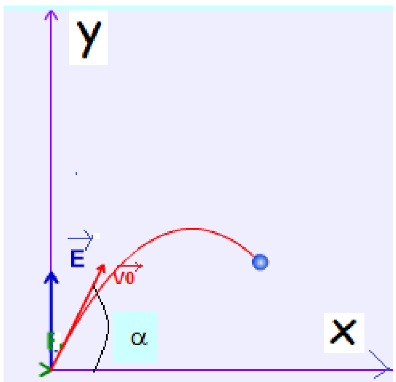
$$\Sigma \vec{F}ext = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La masse ne variant pas au cours du mouvement on peut la sortir de la dérivée:

$$\sum \vec{F}_{ext} = q.\vec{E} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d(.\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{E}$$

Le vecteur accélération est constant, le mouvement est uniformément accéléré.



6) Déterminer les équations horaires du mouvement d'une particule de masse M, supposée ponctuelle, de charge électrique q et de masse m, placée dans un champ

électrostatique uniforme $\vec{E}$ $\left(\vec{a} = \frac{q}{m}.\vec{E}\right)$

Conditions initiales, à t = 0 les vecteurs positions et vitesses ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{OM_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_{x_0} = v_0.\cos\alpha \\ v_{y_0} = v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Equations horaires des coordonnées du vecteur accélération.

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix} = \frac{q}{m}.\vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{q.E_y}{m} = \frac{q.E}{m} \end{vmatrix}$$

Equations horaires des coordonnées du vecteur vitesse.

$$\begin{vmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{q.E}{m} \end{vmatrix}$$

a_x est la dérivée de v_x par rapport au temps, v_x est la primitive de a_x par rapport au temps. Idem pour a_y et v_y.

$$\begin{vmatrix} \frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = C_1 = \text{constante} \\ \frac{q.E}{m} = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow v_y = \frac{q.E}{m}.t + C_2(\text{constante}) \end{vmatrix}$$

les constantes C_1 et C_2 sont déterminées avec les conditions initiales:

$$\begin{vmatrix} v_x = C_1 = v_x(0) = v_0.\cos a \\ v_y(0) = v_y = \frac{q.E}{m}.0 + C_2(\text{constante}) = v_0.\sin a \end{vmatrix}$$

$$C_2 = v_0.\sin a$$

Les coordonnées du vecteur vitesse sont:

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v_0.\cos a \\ v_y = \frac{q.E}{m}.t + v_0.\sin a \end{vmatrix}$$

Détermination des équations horaires des coordonnées du vecteur position.

$$\begin{vmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0.\cos a \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{q.E}{m}.t + v_0.\sin a \end{vmatrix}$$

v_x est la dérivée de x par rapport au temps, x est la primitive de v_x par rapport au temps. Idem pour v_y et y.

$$\begin{vmatrix} x = v_0.\cos a.t + C_3 \\ y = \frac{q.E.t^2}{2.m} + v_0.\sin a.t + C_4 \end{vmatrix}$$

les constantes C_3 et C_4 sont déterminées avec les conditions initiales:

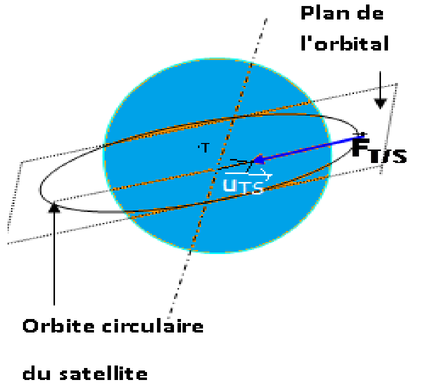
$$\begin{vmatrix} x(0) = v_0.\cos a.0 + C_3 = x_0 = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ y(0) = \frac{q.E.0^2}{2m} + v_0.\sin a.0 + C_4 = y_0 = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \end{vmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur position sont:

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x = v_0.\cos a.t \\ y = \frac{q.Et^2}{2m} + v_0.\sin a.t \end{vmatrix}$$

7) Déterminer l'expression vectorielle de la force gravitationnelle $\vec{F}_{T/S}$ exercée par la Terre, de masse m_T, sur un satellite de masse m, en mouvement circulaire uniforme dans le référentiel géocentrique. Le satellite est situé à une altitude h , le rayon de la Terre est noté R_T. L'expression vectorielle sera exprimée dans la base de Frénet ($(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_T})$. Donner les unités de chacun des termes.

$$\vec{F}_{T/S} = -\frac{G.m_T.m}{(R_T+h)^2}.\vec{u}_{TS} = \frac{G.m_T.m}{(R_T+h)^2}.\overrightarrow{u_n}$$



G: constante de gravitation universelle, $G = 6{,}67.10^{-11}$N $kg^{-2}.m^2$.

Unité légale: m(kg), m_T(kg), h(m), R_T (m), $F_{T/S}$(N)

Le vecteur unitaire $\vec{u}_{TS} = -\vec{n}$ (vecteurs opposés car normes égales à 1, même direction mais sens opposé.

8) Déterminer l'expression du vecteur accélération du centre d'inertie d'un satellite de la Terre, dont la masse est notée m, dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{T/S} = -\frac{G.m_T.m}{R^2}.\vec{u}_{TS} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt}$$

$$\vec{F}_{T/S} = m.\frac{d(.\vec{v})}{dt} = m.\vec{a}$$

$$m.\vec{a} = -\frac{G.m_T.m}{R^2}.\vec{u}_{TS}$$

$$\vec{a} = -\frac{G.m_T}{R^2}.\vec{u}_{TS}$$

$$\text{or } \vec{u}_{TS} = -\vec{n}$$

$$\vec{a} = \frac{G.m_T}{R^2}.\vec{n}$$

9) Sachant que le vecteur accélération d'un satellite de la Terre vaut : $\vec{a} = \frac{G.m_T}{R^2}.\vec{n}$ démontre que si le mouvement est circulaire alors la vitesse est constante. Donner l'expression de la norme de la vitesse.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_N.\vec{n} + a_T.\vec{t} = \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}.\overrightarrow{u_T}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} : \text{valeur de l'accélération normale}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} : \text{valeur de l'accélération tangentielle}$$

or $\vec{a} = \frac{G.m_T}{R^2}.\vec{n}$ **donc:**

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}.\vec{n} + \frac{dv}{dt}.\vec{t} = \frac{G.m_T}{R^2}.\vec{n}$$

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G.m_T}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.m_T}{R}}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{constante}$$

10) Déterminer l'expression de la période de révolution T d'un satellite de la Terre connaissant sa vitesse

$v = \sqrt{\frac{G.m_T}{R}}$ (R : rayon de l'orbite et m_T, masse de la Terre.

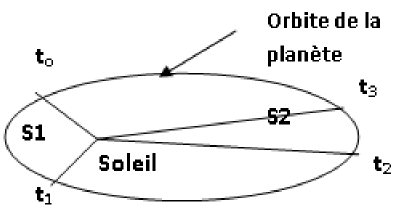
La période de révolution du satellite autour de la Terre **est la durée mise par le satellite pour faire un tour autour de la Terre. Elle est égale à la** circonférence **de l'orbite divisée par la** vitesse **du satellite:**

$$v = \frac{2.\pi.R}{T} \Rightarrow T = \frac{2.\pi.R}{v} \text{ or } v = \sqrt{\frac{G.m_T}{R}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2.\pi.R}{\sqrt{\frac{G.m_T}{R}}} \Rightarrow T = 2.\pi.R\sqrt{\frac{R}{G.m_T}}$$

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{R^3}{G.m_T}}$$

unité: T(s); R(m), $G = 6,67 \times 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}s^{-2}$; m_T(kg)



11) Enoncer les 3 lois de Kepler.
Première loi de Kepler : toutes les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

Seconde loi de Kepler: pendant des intervalles de temps Δt égaux la planète balaye des surfaces 'S' égales de l'ellipse.
Si $\Delta t = t_1 - t_0 = t_3 - t_2$ alors S1=S2

Troisième loi de Kepler ou loi des périodes: Soit T la période de révolution de la planète autour du soleil, et 'a' la longueur du demi-grand axe de l'ellipse. La période de révolution au carré divisée par le demi-grand axe 'a' au cube est une constante. La période T ne dépend pas de la planète mais uniquement de la masse M_S du soleil et de la constante d'attraction universelle G :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S}$$

$G = 6,67.10^{-11} N.kg^{-2}.m^2$: constante de gravitation universelle
$M_S = 1,96.10^{30}$ kg: masse du soleil.