Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

Les systèmes oscillants :

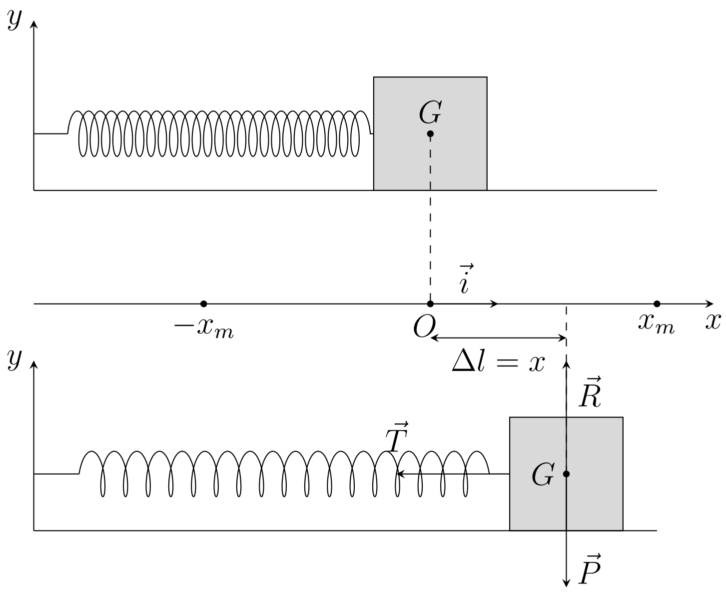
Un système oscillant, est tout simplement un corps ou plusieurs corps, effectuent un mouvement d'aller-retour autour de son position d'équilibre.
Lors de cette étude, on remarquera une analogie entre les systèmes oscillants (le pendule élastique, de torsion, pesant...) et les circuits (LC, RLC...). On parle des oscillateurs harmoniques.

Pendule élastique :

Pendule élastique horizontal :

Étude dynamique :

Sur un plan lisse on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeable, un corps (S) de masse m, on l'écarte de sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale, le solide effectue donc un mouvement rectiligne oscillatoire.



Étudions ce système dynamiquement :
Le système étudié : $\{(S)\}$
Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} : & \text{La réaction du plan} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (Ox), On applique la deuxième loi de Newton :

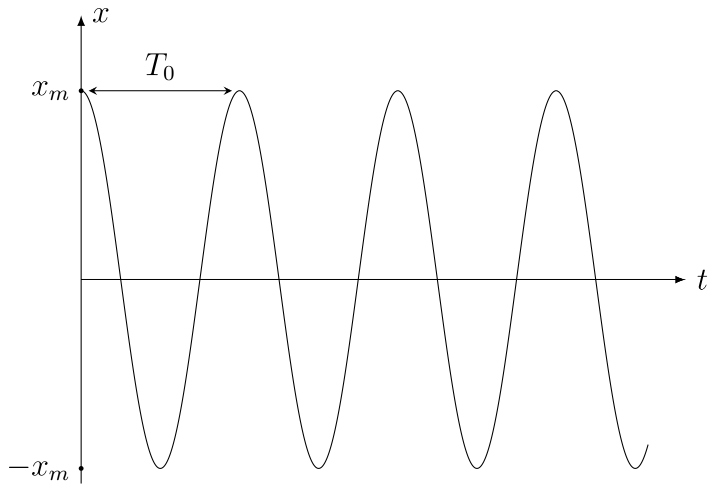
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$
$$-kx = m\ddot{x}$$
$$\frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du seconde ordre, sa solution s'écrit sous forme :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Où :

$$\begin{cases} x_m & \text{Amplitude maximale en (m)} \\ T_0 & \text{La période propre des oscillations (s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$



En dérivant x on trouve l'expression du $\dot{x} = v$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)$$
$$\dot{x} = -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

On pose $x_m\dfrac{2\pi}{T_0} = \dot{x}_m$, on obtient :

$$\dot{x} = -\dot{x}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Et en dérivant cette dernière on trouve l'équation de l'accélération :

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dot{x}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)$$
$$\ddot{x} = -\frac{2\pi}{T_0}\dot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

On pose : $\dfrac{2\pi}{T_0}\dot{x}_m = \ddot{x}_m$, on obtient donc :

$$\ddot{x} = -\ddot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

La période T_0 et la fréquence f_0 :
On a :

$$\ddot{x} = -\ddot{x}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$
$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$
$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x$$

C'est l'équation caractéristique du mouvement rectiligne oscillatoire.
On sait d'après l'équation différentielle que :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Par suite :

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2$$
$$T_0^2 = (2\pi)^2\frac{m}{k}$$
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

C'est la période propre du pendule élastique en oscillations libres non amorties. La fréquence est donc :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

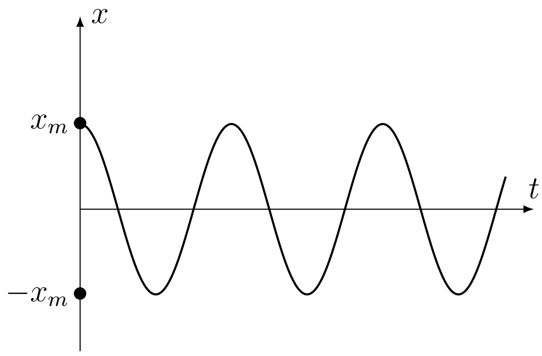
Remarque : Si n est le nombre des oscillations effectuées par l'oscillateur (le pendule) pendant la durée Δt, alors :

$$T_0 = \frac{\Delta t}{n}$$

Détermination de φ :
Afin de déterminer la phase à l'origine des dates, on utilise les conditions initiales, soit la fonction suivante :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

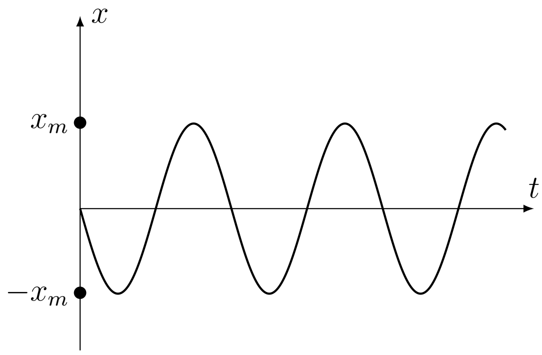
On a trois cas possibles, selon la représentation graphique de x en fonction du temps :
Cas 1 :
Si la représentation graphique est :



À $t = 0$ on a $x = x_m$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x_m &= x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) \\ &= x_m \cos(\varphi) \\ 1 &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

La solution est $\varphi = 0$.
Cas 2 :
Si la représentation graphique est :



À $t = 0$ on a $x = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 0 &= x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) \\ &= x_m \cos\left(\varphi\right) \\ 0 &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

La solution est $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Dérivons x et trouvons la réponse correcte :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \\ &= -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \end{aligned}$$

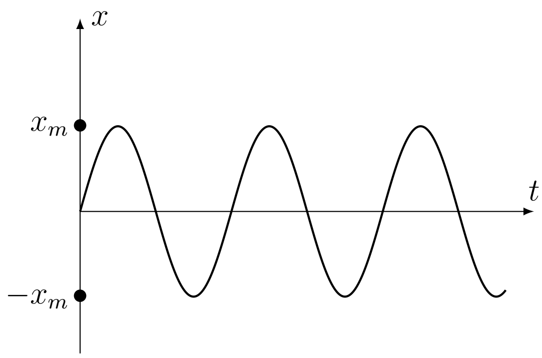
À $t = 0$ on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)$$

Or cette expression doit être négative alors : $\sin(\varphi) > 0 \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Cas 3 :

Si la représentation graphique est :



À $t = 0$ on a $x = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 0 &= x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \times 0 + \varphi\right) \\ &= x_m \cos\left(\varphi\right) \\ 0 &= \cos(\varphi) \end{aligned}$$

La solution est $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$. Dérivons x et trouvons la réponse correcte :

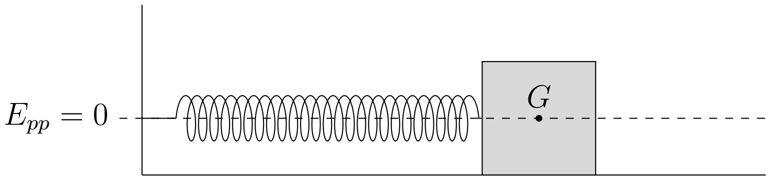
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \\ &= -x_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \end{aligned}$$

À $t = 0$ on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -x_m \frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi)$$

Or cette expression doit être positive alors : $\sin(\varphi) < 0 \Longrightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Étude énergétique :



L'énergie cinétique : C'est l'énergie qu'un corps possède du fait de son mouvement, son unité est Joules (J), elle est donné par la relation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle : C'est l'énergie que possède le corps potentiellement, et capable d'être transformé en autre forme d'énergie, son unité est Joules (J), dans notre cas c'est la somme de l'énergie potentielle du pesanteur, et potentielle élastique, en choisissant l'axe passant par le centre d'inertie G comme l'origine de l'énergie, on obtient : $E_{pp} = mg(z_0 - z_0) = 0$. Pour l'énergie élastique, son expression est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

On prend $E_{pe} = 0$ lorsque $x = 0$, donc $C = 0$ et :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Et l'énergie potentielle :

$$E_p = E_{pp} + E_{pe}$$

L'énergie mécanique : C'est l'énergie totale du système mécanique, emmagasinée comme énergie potentielle et cinétique, son unité est Joules (J) :

$$E_m = E_c + E_p$$

On rappelle que lorsque les frottements sont absents, l'énergie mécanique se conserve. Alors qu'elle est perdue lorsque les frottements sont présents.

$$\Delta E_m = \begin{cases} 0, & \text{Absence des frottements} \\ -Q, & \text{Présence des frottements} \end{cases}$$

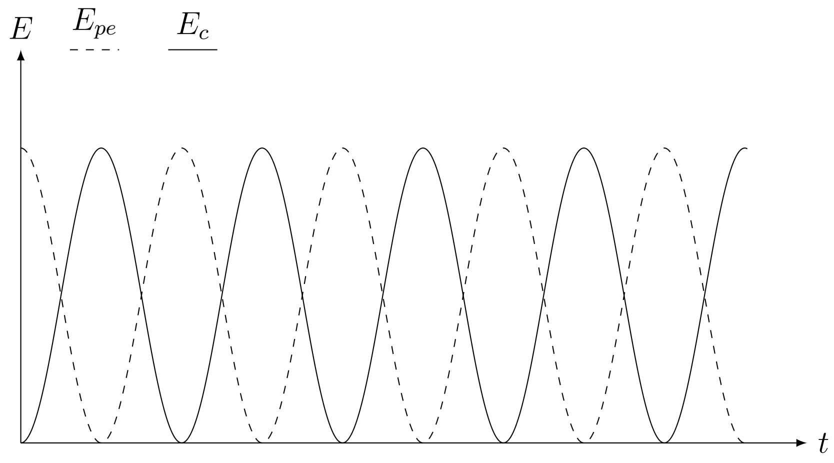
Où Q est la chaleur en Joules (J).

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) \\ 0 &= kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + m\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} \\ &= kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} \end{aligned}$$

$$kx + m\ddot{x} = 0$$

$$\frac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue à partir l'étude dynamique.
On sait que : $E_m = E_{pe} + E_c = \mathrm{C^{te}}$.



On constate un échange d'énergie potentielle et cinétique dans le système.
On admet que la période énergétique T vaut la moitié de la période propre des oscillations :

$$\begin{aligned}
E_{pe} &= \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) \\
&= \frac{1}{2}kx_m^2\left(\frac{\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\right)+1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}kx_m^2 + \frac{1}{4}\cos\left(2\frac{2\pi}{T_0}t+2\varphi\right) \\
&= \frac{1}{4}kx_m^2 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{2}}+\varphi'\right) \\
&= \frac{1}{4}kx_m^2 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T}+\varphi'\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$T = \frac{T_0}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = 2\varphi$$

Autrement dit, les échanges sont faites 2 fois pendant T_0.
Le travail de la tension du ressort :
Généralement le travail d'une force est calculé à partir la relation suivante :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l}$$

Le déplacement du ressort se fait selon l'axe (Ox), donc le vecteur du déplacement élémentaire peut être remplacé par dx :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{T}\right) = \int_A^B \vec{T}.\mathrm{d}\vec{l} = \int_A^B -kx\mathrm{d}x = -k\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

D'où le travail de la force du rappel, lorsque le point d'application se déplace d'un point A à B, est :

$$\underset{A\to B}{W}\left(\vec{T}\right) = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2)$$

Remarque : Vu l'année précédente, on sait que la variation de l'énergie potentielle du pesanteur est donnée par la relation :

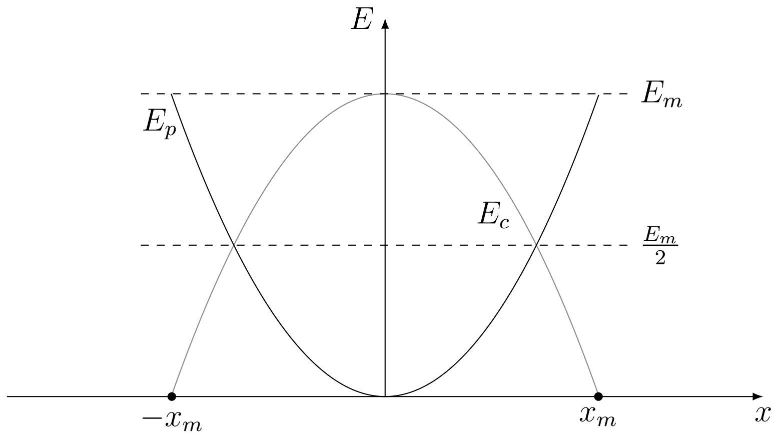
$$\Delta E_{pp} = -W\left(\vec{P}\right)$$

On peut démontrer que :

$$\Delta E_{pe} = -W\left(\vec{T}\right)$$

$$\Delta E_{pe} = E_{pe_f} - E_{pe_i} = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = -W\left(\vec{T}\right)$$

Diagramme d'énergie :



Les frottements sont négligeables, donc l'énergie mécanique se conserve.
Lorsque $x = \pm x_m$ alors $\dot{x} = 0$, d'où : $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$.
Et lorsque $x = 0$ alors $\dot{x} = \pm\dot{x}_m$, d'où : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.
On déduit donc que :

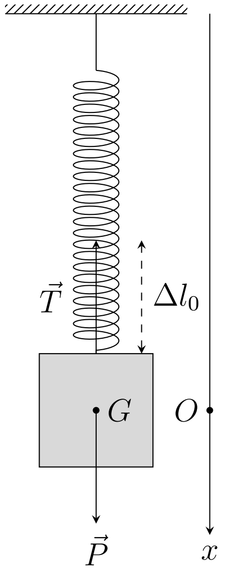
$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_m^2 \Longleftrightarrow \dot{x}_m = \sqrt{\frac{k}{m}}x_m$$

Par suite la vitesse est maximale lorsque le corps parcourt la distance maximale x_m.

Pendule élastique vertical :

Étude dynamique :

À l'extrémité libre d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeable, on attache un corps (S) de masse m.
Dans ce cas il faut faire attention en ce qui concerne l'élongation du ressort, car lors du suspension du corps, le ressort s'allonge d'une distance Δl_0. Pour la déterminer on étudie le système en équilibre :



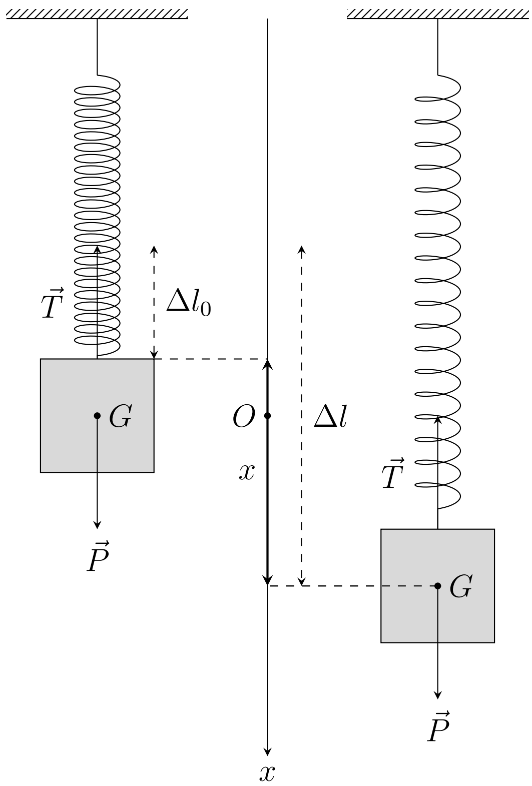
Système étudié : $\{(S)\}$
Bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le référentiel terrestre supposée galiléen on associe le repère (Ox), On applique la première loi de Newton :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T} &= \vec{0} \\ P - T &= 0 \\ mg &= k\Delta l_0 \\ \Delta l_0 &= \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

En allongeant le corps (S) vers le bas, il effectue un mouvement oscillatoire, on suppose que l'air n'a aucun effet sur le mouvement de (S) :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \end{cases}$$

Dans le repère (Ox) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

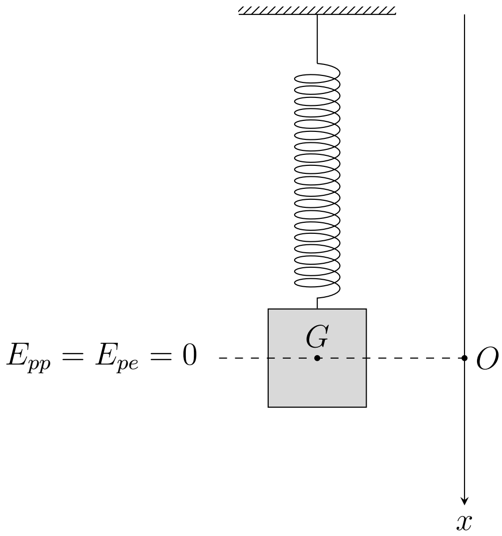
$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ mg - k\Delta l &= m\ddot{x} \\ mg - k\left(\frac{mg}{k} + x\right) &= m\ddot{x} \\ mg - mg - kx &= m\ddot{x} \\ m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

C'est la même équation différentielle obtenue dans la section précédente, sa solution est toujours de la forme :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Sa période propre des oscillations est : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

Étude énergétique :



Énergie potentielle : On considère que lorsque le système est en équilibre $E_{pe} = 0$, ainsi que le plan passant par G à l'équilibre, constitue l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$:
On sait que l'énergie potentielle de pesanteur est :

$$E_{pp} = -mgx + C$$

Déterminons C :
Lorsque $x = x_G = 0$ on a :

$$\begin{aligned} E_{pp} &= 0 \\ -mgx_G + C &= 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Par suite :

$$E_{pp} = -mgx$$

Et l'énergie potentielle élastique est :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + C$$

Avec $\Delta l = \Delta l_0 + x$, déterminons C :
Lorsque le système est en équilibre on a :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= 0 \\ \frac{1}{2}\Delta l_0^2 + C &= 0 \\ C &= -\frac{1}{2}\Delta l_0^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_0 \\ &= \frac{1}{2}k\left((\Delta l_0 + x)^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k(\Delta l_0^2 + 2\Delta l_0 x + x^2 - \Delta l_0^2) \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l_0 x \end{aligned}$$

Par suite l'énergie potentielle du système est :

$$\begin{aligned} E_p &= -mgx + \frac{1}{2}kx^2 + k\Delta l_0 x \\ &= x\left(\underbrace{k\Delta l_0 - mg}_{0} + \frac{1}{2}kx\right) \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}(kx^2 + m\dot{x}^2) \end{aligned}$$

On dérive E_m sachant qu'elle est constante :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{1}{2}(2kx\dot{x} + 2m\dot{x}\ddot{x}) &= 0 \\ \dot{x}(kx + m\ddot{x}) &= 0 \\ \frac{k}{m}x + \ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

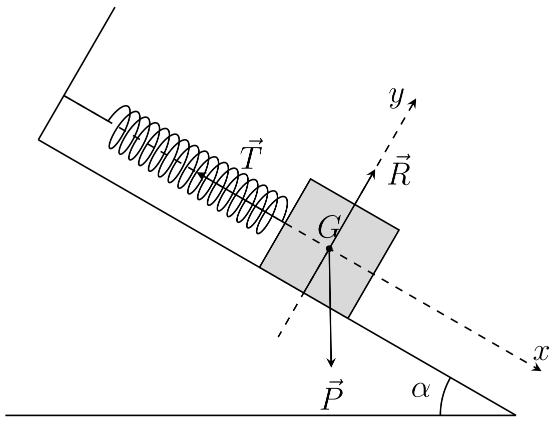
Et encore une fois on obtient l'équation différentielle, de solution :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Pendule élastique incliné :

Étude dynamique :

Dans un plan lisse incliné d'un angle α, on attache à l'extrémité d'un ressort de spires non jointives et de masse négligeables, un corps (S) de masse m, le ressort s'allonge donc d'une distance Δl_0, on la détermine en étudiant le système à l'équilibre :



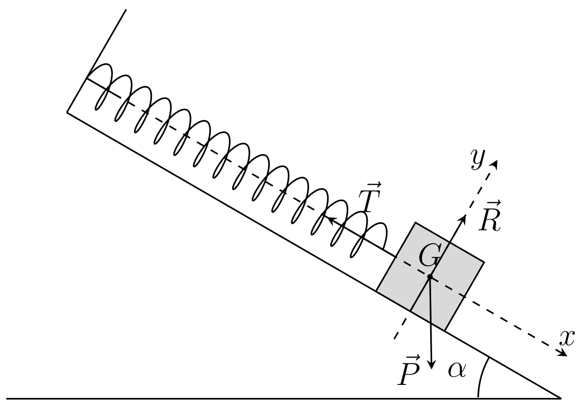
Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \\ \vec{R} : & \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

Dans le repère (Gx) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la première loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} &= \vec{0} \\ P\sin\alpha - T &= 0 \\ P\sin\alpha &= T \\ k\Delta l_0 &= P\sin\alpha \\ \Delta l_0 &= \frac{mg\sin\alpha}{k} \end{aligned}$$

Maintenant on écarte le corps, et on le lâche sans vitesse initiale, il effectue un mouvement oscillatoire :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} : & \text{Le poids du corps} \\ \vec{T} : & \text{La tension du ressort} \\ \vec{R} : & \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

Dans le repère (Gx) associé au référentiel terrestre galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ P\sin\alpha - T &= m\ddot{x} \\ mg\sin\alpha - k\Delta l &= m\ddot{x} \\ mg\sin\alpha - k(\Delta l_0 + x) &= m\ddot{x} \\ \underbrace{mg\sin\alpha - k\Delta l_0}_{0} - kx &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

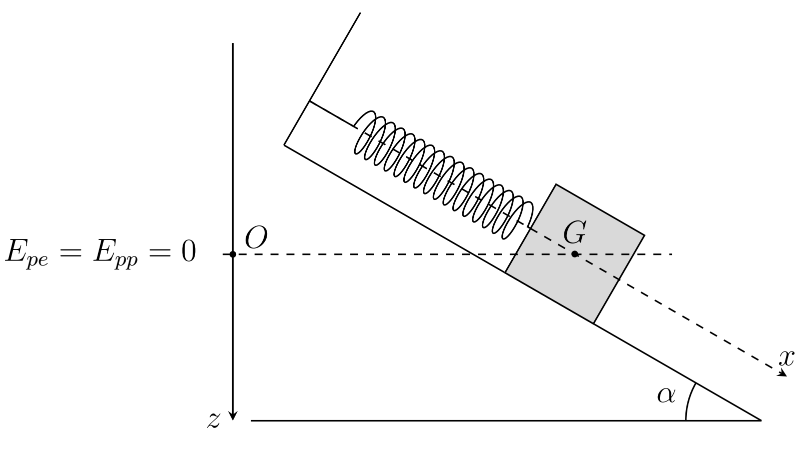
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est l'équation différentielle obtenue dans les deux premiers sections, sa solution est toujours :

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Sa période d'oscillations est : $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

Étude énergétique :



Énergie potentielle : On considère que l'énergie potentielle élastique est nulle $E_{pe} = 0$ lorsque le système est en équilibre, ainsi que le plan passant par G constitue à l'équilibre l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$: On sait que :

$$E_{pp} = -mgz + C$$

On détermine C :

$$\begin{aligned} E_{pp} &= 0 \\ -mgz_0 + C &= 0 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$E_{pp} = -mgz$$

Or $z = x \sin \alpha$, alors :

$$E_{pp} = -mgx \sin \alpha$$

Et on a :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + C$$

On détermine C :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= 0 \\ \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 + C &= 0 \\ C &= -\frac{1}{2}k\Delta l_0^2 \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}k\Delta l^2 - \frac{1}{2}k\Delta l_0^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left((\Delta l_0 + x)^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= \frac{1}{2}k\left(\Delta l_0^2 + 2\Delta l_0 x + x^2 - \Delta l_0^2\right) \\ &= k\Delta l_0 x + \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

Par suite l'énergie potentielle est :

$$\begin{aligned} E_p &= -mgx \sin \alpha + k\Delta l_0 x + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= x\left(\underbrace{k\Delta l_0 - mg \sin \alpha}_{0} + \frac{1}{2}kx\right) \\ &= \frac{1}{2}kx^2 \end{aligned}$$

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}(kx^2 + m\dot{x}^2) \end{aligned}$$

On dérive E_m sachant qu'elle est constante :

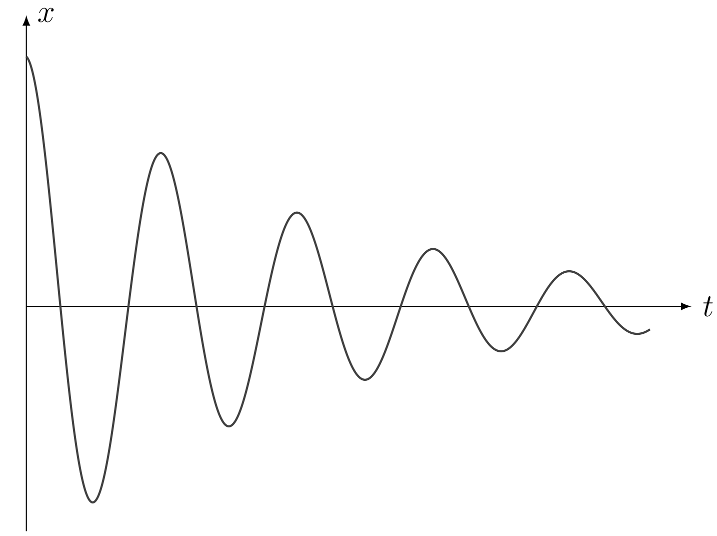
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{1}{2}(2kx\dot{x} + 2m\dot{x}\ddot{x}) &= 0 \\ \dot{x}(kx + m\ddot{x}) &= 0 \\ \frac{k}{m}x + \ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

On obtient toujours l'équation différentielle de solution :

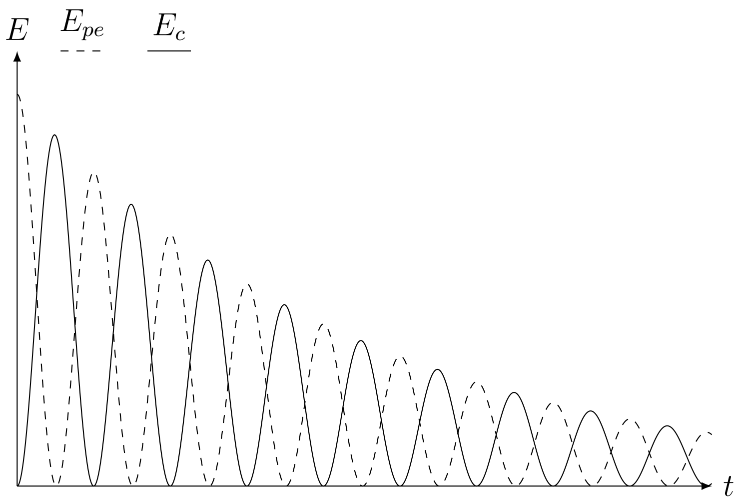
$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

L'amortissement des oscillations :

En réalité, les frottements ne sont pas négligeables, ceci constitue un obstacle devant le mouvement oscillatoire du corps. Le corps n'atteint plus $\pm x_m$, sa vitesse et son accélération décroient, et sur l'enregistrement on observe :



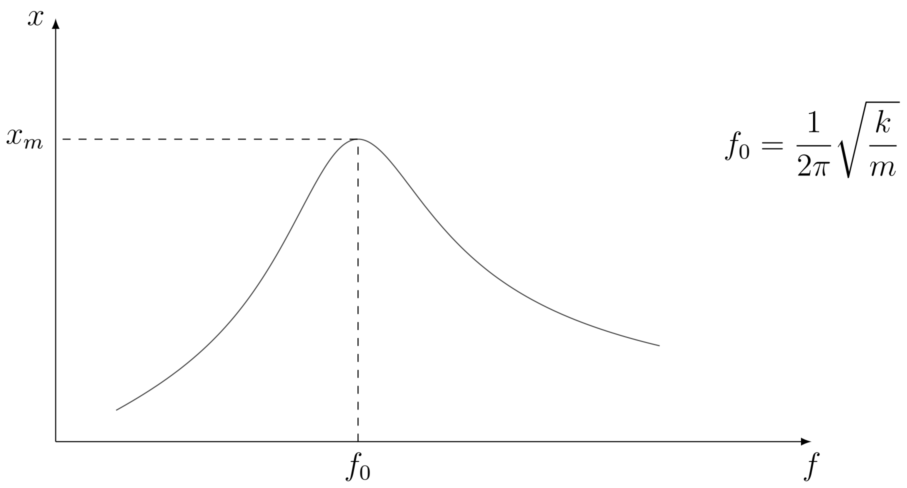
Dans ce cas le mouvement oscillatoire est pseudo-périodique de pseudo-période T.
Et puisque les frottements sont présents alors l'énergie mécanique ne se conserve plus, et diminue progressivement au cours du temps :



L'énergie mécanique se transforme progressivement en chaleur, et le mouvement continue jusqu'à que le système revient à sa position d'équilibre. Sa dérivée est donc négative vaut le travail des forces de frottements.

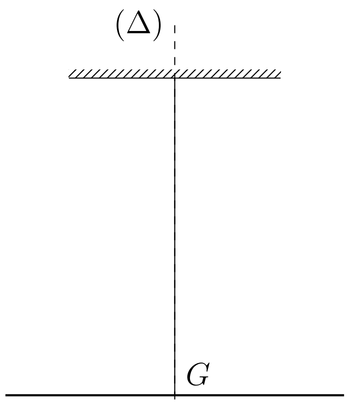
La résonance mécanique :

Parfois les systèmes mécaniques, sont obligés à osciller d'une fréquence imposée par un moteur mécanique par exemple, on dit que les oscillations sont forcées.
Dans ce cas le moteur est dit excitateur, il impose la fréquence à un système oscillant dit résonateur, la période du résonateur est donc identique à celle du excitateur, ainsi qu'elle est proportionnelle à l'amplitude du résonateur, cette dernière est maximale lorsque $T = T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ autrement dit $f = f_0$, c'est-à-dire l'excitateur impose la fréquence des oscillations libres.



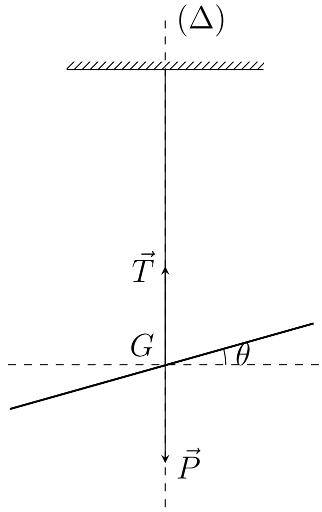
Pendule de torsion :

Le pendule de torsion est un système constitué d'une barre (S), attaché à l'extrémité d'un fil par un point G appartenant à l'axe (Δ) qui passe par le centre d'inertie de cette barre.



Étude dynamique :

On écarte la barre de sa position initiale d'équilibre, et on la lâche sans vitesse initiale. Elle effectue donc un mouvement oscillatoire de rotation. On étudie ces oscillations à un instant t où la barre se trouve en une position repérée par l'angle θ.



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}: & \text{Le poids de la barre} \\ \vec{T}: & \text{La tension du fil} \\ C: & \text{Le couple de torsion} \end{cases}$$

On rappelle que le moment du rappel $\mathscr{M} = -C\theta$, qui permet à la barre de retrouver sa position initiale. C est la constante de torsion qui dépend du fil son unité est N.m.rad^{-1}.
D'après la relation fondamentale de la dynamique on a :

$$\sum \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}\right) = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) + \mathscr{M} = J_\Delta\ddot{\theta}$$

Puisque $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont confondues avec (Δ) alors :

$$\mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) = \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{T}\right) = 0$$

Par suite :

$$\mathscr{M} = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$-C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$
$$J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du seconde ordre, sa solution est :

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Où :

$$\begin{cases} \theta_m & \text{Amplitudeangulaire maximale en (rad)} \\ T_0 & \text{La période propre des oscillations (s)} \\ \varphi & \text{Phase à l'origine des dates en (rad)} \end{cases}$$

Afin d'obtenir l'expression de $\omega = \dot{\theta}$, on dérive par rapport au temps θ :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right)$$
$$\dot{\theta} = -\theta_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

On pose $\theta_m \dfrac{2\pi}{T_0} = \dot{\theta}_m$, on obtient :

$$\dot{\theta} = -\dot{\theta}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Et en dérivant cette dernière par rapport au temps, et on trouve l'équation de l'accélération angulaire :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\dot{\theta}_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)\right) \\
\ddot{\theta} &= -\frac{2\pi}{T_0}\dot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)
\end{aligned}$$

On pose : $\dfrac{2\pi}{T_0}\dot{\theta}_m = \ddot{\theta}_m$, on obtient donc :

$$\ddot{\theta} = -\ddot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

La période T_0 et la fréquence f_0 :
On a :

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta} &= -\ddot{\theta}_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\
\ddot{\theta} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\
\ddot{\theta} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta
\end{aligned}$$

C'est l'équation caractéristique du mouvement de rotation oscillatoire.
On sait d'après l'équation différentielle que :

$$\ddot{\theta} = -\frac{C}{J_\Delta}\theta$$

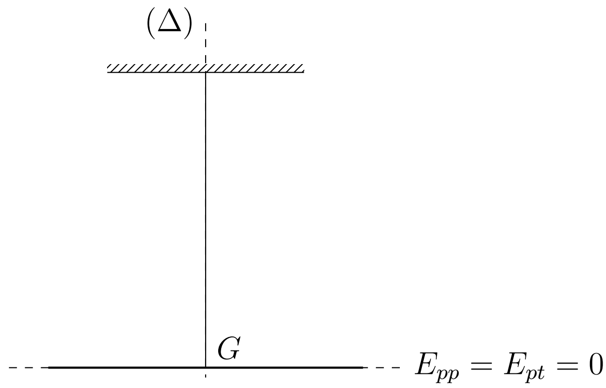
Par suite :

$$\begin{aligned}
\frac{C}{J_\Delta} &= \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \\
T_0^2 &= (2\pi)^2 \frac{J_\Delta}{C} \\
T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}
\end{aligned}$$

C'est la période propre du pendule élastique en oscillations libres non amorties, la fréquence est donc :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

Étude énergétique :



Énergie potentielle :
Dans ce cas :

$$E_p = E_{pp} + E_{pt}$$

On suppose que le plan horizontal passant par G à l'équilibre, constitue l'état référentiel de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$. Ceci résulte que l'énergie potentielle reste toujours nulle au cours des oscillations. Pour l'**énergie potentielle de torsion**, l'énergie mise en évidence après la rotation de la barre. Son expression est :

$$E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + C'$$

On prend $E_{pt} = 0$ lorsque $\theta = 0$, donc $C' = 0$, par suite :

$$E_p = E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= \frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.
On dérive par rapport au temps E_m :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C\theta^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) &= 0 \\ C\theta\dot{\theta} + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta &= 0 \end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle obtenue à partir de l'étude dynamique, sa solution est :

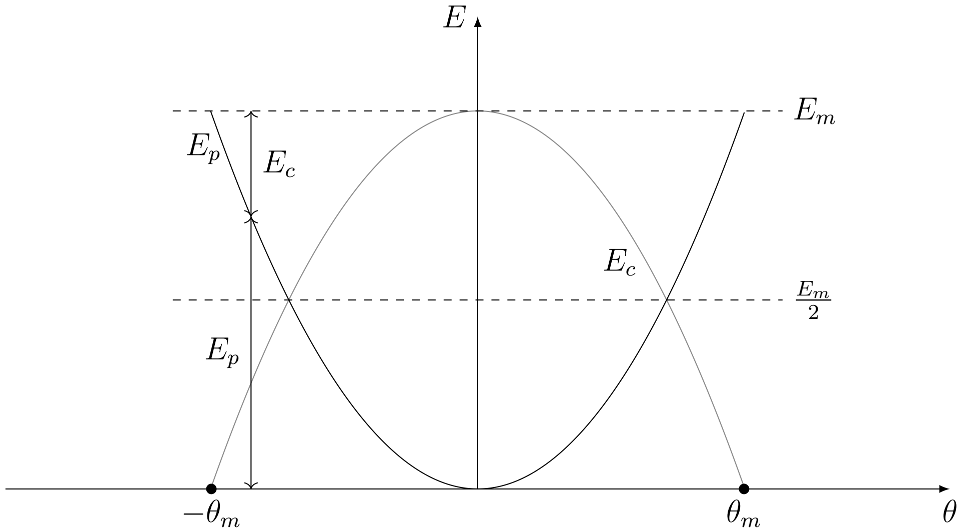
$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

Diagramme d'énergie :
Les frottements sont négligeables donc on a une conservation d'énergie mécanique :
Lorsque $\theta = 0$ on a : $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$, et lorsque $\theta = \theta_m$ on a $\dot{\theta} = 0$, par suite :

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^2 = \frac{1}{2}C\theta_m^2$$

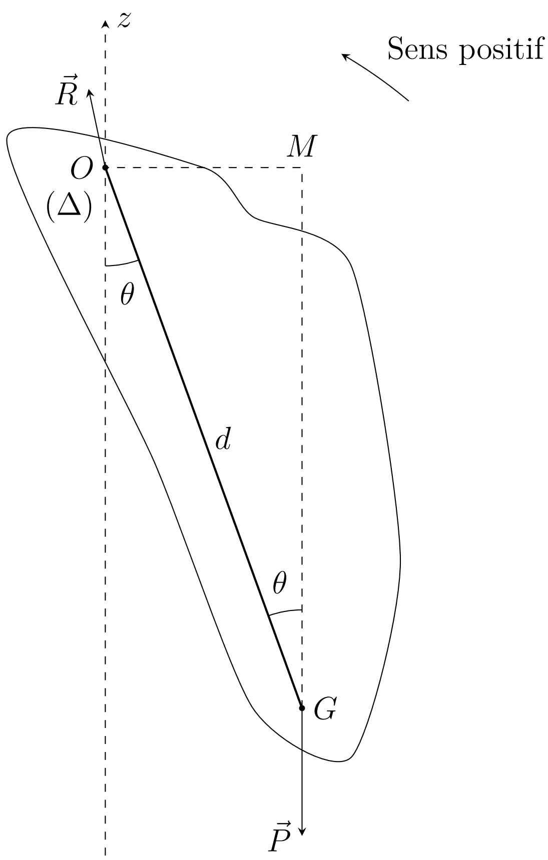
On peut déduire que :

$$\dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}\theta_m$$



Pendule pesant :

Le pendule pesant, est tout solide mobile autour un axe (Δ), horizontal et fixe ne passant pas par son centre d'inertie.



Étude dynamique :

Écartons le solide (S) de sa position d'équilibre et lâchons le sans vitesse initiale. Il effectue donc un mouvement oscillatoire. On étudie ces oscillations à un instant t où le solide se trouve en une position repérée par l'angle θ.
Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P}: & \text{Le poids de la barre} \\ \vec{R}: & \text{La réaction de l'axe} \end{cases}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} \sum \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{F}\right) &= J_\Delta \ddot{\theta} \\ \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{P}\right) + \mathscr{M}_\Delta\left(\vec{R}\right) &= J_\Delta \ddot{\theta} \\ -P.OM &= J_\Delta \ddot{\theta} \\ -mgd\sin\theta &= J_\Delta \ddot{\theta} \end{aligned}$$

D'où :

$$J_\Delta \ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0 \Longleftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

Car pour les petit angles on prend toujours comme approximation : $\sin\theta \approx \theta$.
L'équation différentielle obtenue est :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

De solution :

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

En la dérivant deux fois successivement par rapport au temps on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= -\theta_m \frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\ \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \\ \ddot{\theta} &= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta \end{aligned}$$

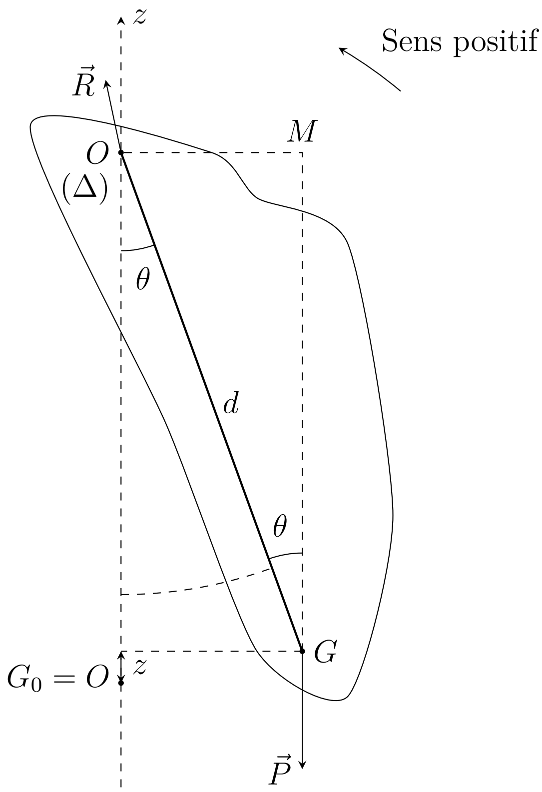
Or :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{J_\Delta}\theta$$

Alors :

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{mgd}{J_\Delta} \Longleftrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

Étude énergétique :



Énergie potentielle :
Dans ce cas on a :

$$E_p = E_{pp} = mgz + C$$

On suppose que le plan horizontal passant par $O = G_0$ à l'équilibre, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur, $E_{pp} = 0 \Longleftrightarrow mgz_0 + C = 0 \Longleftrightarrow C = 0$, par suite :

$$E_p = mgz$$

À un instant t, le solde se trouve en une position repéré par θ.

$$\begin{aligned} z &= d - OG_0 \\ &= d - d\cos\theta \\ &= d(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

D'où :

$$E_p = mgd(1 - \cos\theta)$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}$$

Énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_m &= E_p + E_c \\ &= mgd(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

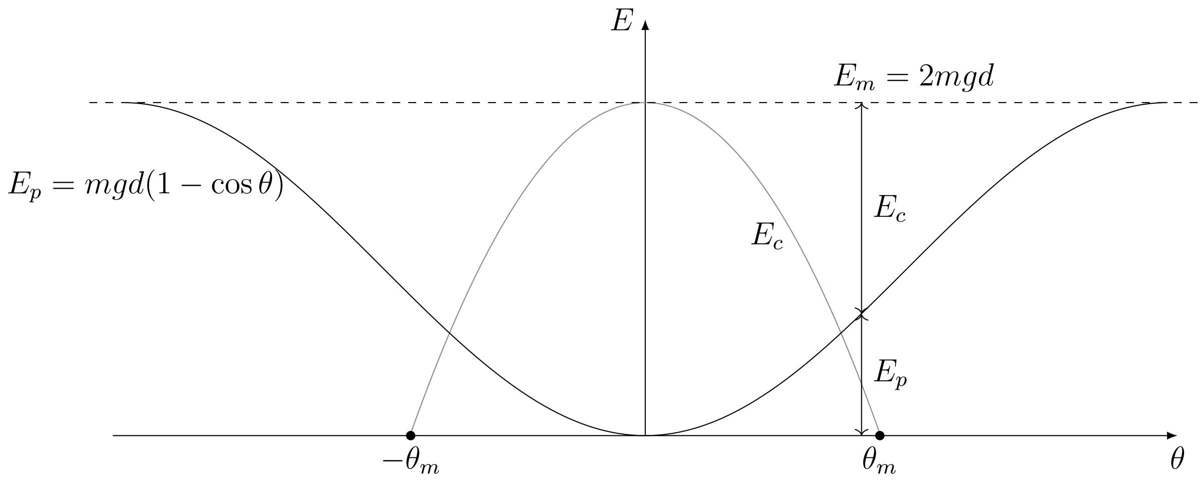
Les frottements sont négligeables donc, E_m est conservée. On la dérive par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mgd(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2\right) = 0$$
$$mgd\sin(\theta)\,\dot{\theta} + J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$
$$J_\Delta\ddot{\theta} + mgd\sin\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue précédemment.
Diagramme d'énergie : On sait que :

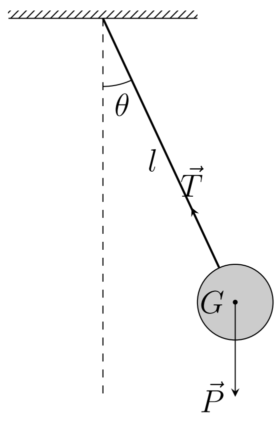
$$E_p = mgd(1-\cos\theta)$$

Lorsque $\cos\theta = -1$, alors $E_{p_m} = E_m = 2mgd$, ainsi que l'énergie cinétique s'annule en $\pm\theta$.



Pendule simple :

Le pendule simple est tout point matériel de masse m, qui peut osciller autour d'un axe horizontal fixe (Δ).



Les mêmes étapes à suivre, pour étudier ces oscillations, il faut mentionner que :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgl}}$$

Or $J_\Delta = ml^2$, alors :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$