



# Chute verticale d'un corps solide

## I. CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT

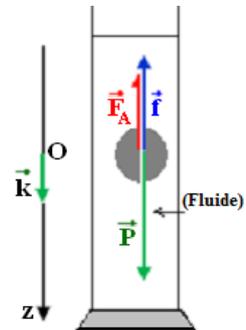
### 1. Rappel

Le mobile est soumis à trois forces

- Poids :  $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot g \cdot \vec{k}$
- Poussée d'Archimède :  $\vec{F}_A = -m_f \cdot g \cdot \vec{k}$  avec  $m_f$ : masse du fluide déplacé
- Forces de frottements fluide :  $\vec{f} = -k \cdot v_G^n \cdot \vec{k}$  avec  $k$  est une constante

### Caractéristiques des forces :

	Direction :	Sens :	Intensité :	Composante sur Oz
$\vec{P}$	La verticale (parallèle à l'axe Oz)	Vers le bas	$P = m \cdot g$	$P_z = m \cdot g$
$\vec{F}_A$		Vers le haut	$F_A = m_f \cdot g$	$F_{Az} = -m_f \cdot g$
$\vec{f}$		Vers le haut	$f = k \cdot V^n$	$f_z = -k \cdot V^n$



### 2. Equation différentielle vérifiée par la vitesse:

On applique alors la deuxième loi de Newton :  $\sum F = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m \cdot \vec{a}_G$$

En projetant la relation vectorielle sur l'axe vertical, Oz dirigé vers le bas :

$$P_z + F_{Az} + f_z = m \cdot a_z \quad \text{et} \quad P - F_A - f = m \cdot a_z \quad \text{d'où} \quad m \cdot g - m_f \cdot g - k \cdot v^n = m \cdot a_z$$

$$\text{On obtient alors l'expression : } m \cdot g - m_f \cdot g - k \cdot v^n = m \frac{dv}{dt}$$

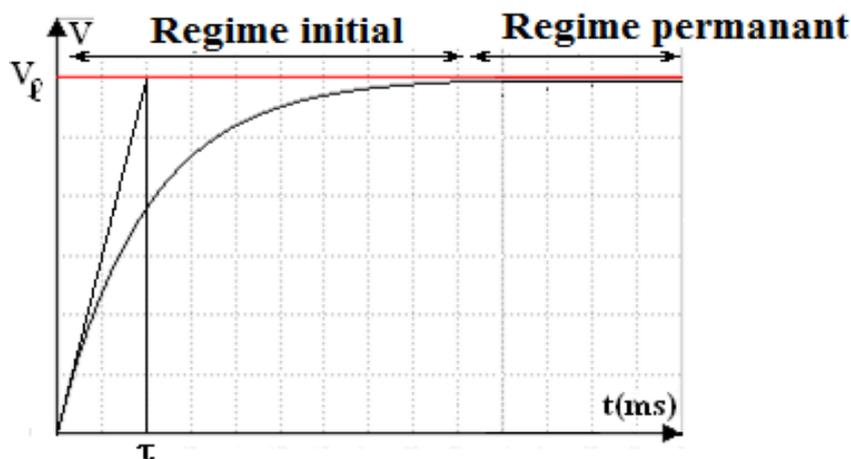
$$g \cdot (m - m_f) - k \cdot v^n = m \frac{dv}{dt} \quad \text{et par suite} \quad \frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{m - m_f}{m} - \frac{k}{m} \cdot v^n : \text{Equation différentielle}$$

L'équation différentielle s'écrit sous la forme  $\frac{dv}{dt} = B - A \cdot v^n$  avec  $A = g \cdot \frac{m - m_f}{m} = g \cdot (1 - \frac{m_f}{m})$  et  $B = \frac{k}{m}$

#### Remarque :

On considère une sphère de masse volumique  $\rho$ , de volume  $V$  ( $m = \rho \cdot V$ ) en mouvement dans un fluide de masse volumique  $\rho_0$  ( $m_f = \rho_0 \cdot V$ )

$$A = g \cdot \frac{m - m_f}{m} = g \cdot (1 - \frac{m_f}{m}) = g \cdot (1 - \frac{\rho_0}{\rho})$$



Au cours d'une chute verticale avec frottement, le mouvement du centre d'inertie G du solide peut se décomposer en deux phase :

- Le régime initial ou transitoire, pendant lequel :
  - La vitesse  $v_G$  augmente.
  - La valeur  $f$  de la force de frottement fluide augmente
  - L'accélération  $a_G$  diminue.
- Le régime asymptotique ou permanent, pendant lequel
  - La vitesse  $v_G$  est égale à une vitesse constante  $v_\ell$ .
  - La valeur  $f$  de la force de frottement fluide est constante
  - L'accélération  $a_G$  est nulle.

$$\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_G^n$$

### Le régime initial

$$v_G = 0 \text{ et } \frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_G^n = A$$

### Le régime permanent

La vitesse  $v_G = v_\ell = C^{te}$ .

$$\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_\ell^n = 0$$

$$\text{d'où } A = B \cdot v_\ell^n$$

$$\text{et } v_\ell^n = \frac{A}{B} \text{ et } v_\ell = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

### Graphiquement

A  $t = \tau$ , La tangente à la courbe  $v(t)$  à  $t=0$  et l'asymptote  $v = v_\ell$  se croisent donc  $V_\ell = a_0 \cdot \tau$

$a_0$  : le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $v(t)$  à l'instant  $t=0$  alors  $a_0 = A$

## 3. La solution de l'équation différentielle par la méthode D'EULER

La méthode d'Euler est une méthode numérique **itérative** qui permet d'évaluer, à intervalles de temps réguliers, différentes valeurs approchées à partir des conditions initiales.

Il faut pour cela connaître :

- L'équation différentielle du mouvement  $\frac{dv}{dt} = A - B \cdot v^n$ .
- Les conditions initiales  $v_0$ .
- Le pas de résolution  $\Delta t$  ;  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ .

On peut déterminer les grandeurs cinétiques (vitesses et accélérations) par :

- ✓ L'équation différentielle à l'instant  $t_i$  :  $a_i = \frac{dv}{dt} = A - B \cdot v_i^n$  (pour le même point : connaître la vitesse d'un point c'est déterminer son accélération et réciproquement).
- ✓ L'expression de la vitesse :  $V_{i+1} = V_i + a_i \Delta t$  (d'un point  $M_i$  vers un autre  $M_{i+1}$  : Connaître la vitesse et l'accélération d'un point  $M_i$  on peut déterminer la vitesse du point suivant  $M_{i+1}$ ).

$t_0 = 0$	$V_0 = 0$	—————→	$a_0 = A - B \cdot (V_0)^n = A$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$V_1 = V_0 + a_0 \Delta t$	↙—————→	$a_1 = A - B \cdot (V_1)^n$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$V_2 = V_1 + a_1 \Delta t$	↘—————→	$a_2 = A - B \cdot (V_2)^n$

## II. La chute libre d'un corps solide

- Le projectile est soumis à l'unique action de son poids  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
- Les deux vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{g}$  ont le même sens et la même direction (les deux vecteurs sont colinéaires)
- La 2<sup>ème</sup> loi de Newton  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$  d'où  $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G$  donc  $\vec{a}_G = \vec{g}$
- Les deux vecteurs  $\vec{a}_G$  et  $\vec{g}$  ont les mêmes caractéristiques

### 1. Caractéristique du vecteur accélération $\vec{a}_G$

**Origine :** Le point G

**Direction :** - La droite verticale

- La même direction que  $\vec{g}$  (même direction que le poids  $\vec{P}$ )

**Sens :** - Vers le bas

- Le même sens que  $\vec{g}$  (même sens que le poids  $\vec{P}$ )

**Intensité :**  $a_G = g$

### 2. Coordonnées de $\vec{a}_G$ vecteur accélération :

$$a_y = -g = C^{te}$$

A l'instant  $t = 0$

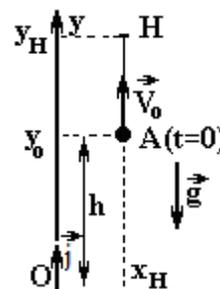
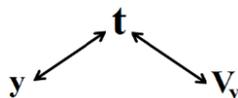
$$y_0 = h \text{ et } V_{0y} = V_0$$

### 3. Nature du mouvement sur l'axe Oy

$a_y = -g = C^{te}$  : Le mouvement est rectiligne uniformément varié sur l'axe Oy

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot t + y_0$$

$$V_y = -g \cdot t + V_0$$



#### 4. La flèche :

La flèche est l'altitude H la plus élevée atteinte par le projectile

- Au point H la composante de la vitesse est nulle  $V_{Hy}=0$

$Vy = -g \cdot t_H + V_0 = 0$  d'où  $t_H = \frac{V_0}{g}$  : l'instant d'arrivée au point H et on remplace dans  $y(t)$

$$y_H = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0 \cdot \frac{V_0}{g} + y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_0^2}{g} + y_0$$

$y_H$ : Ordonnée du point H d'où  $AH = y_H - y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_0^2}{g}$

**\*\* Exploiter les équations horaires avec une ou plusieurs informations**

**Au point A**

- $y(A)=h$
- L'instant de passage par le point A est  $t_A = 2 \cdot t_H = \frac{2 \cdot V_0}{g}$
- La vitesse de passage par le point A est  $V_0$

**Au point O** •  $y(O) = 0$