Les lois de Newton :

Complément mathématique :

Vecteur vitesse :

Définition : Le vecteur vitesse instantanée d'un mobile ponctuel en un point M est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

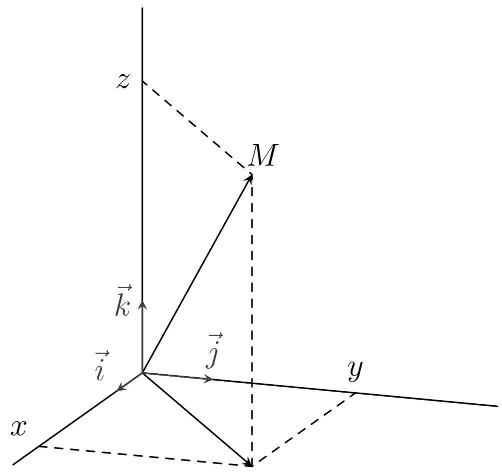
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

Le vecteur vitesse instantanée en un point M a les caractéristiques suivantes :

$$\begin{cases} \text{Origine :} & \text{Le point } M \\ \text{Direction :} & \text{La tangente à la trajectoire au point } M \text{à la date } t \\ \text{sens :} & \text{Celui de mouvement à cet instant} \\ \text{norme :} & \text{La valeur positive} \|\vec{v}\| = v \end{cases}$$

Dans le système international d'unités, la vitesse instantanée s'exprime en m/s.

Vecteur vitesse et cordonnées cartésiennes :



Dans le repère cartésien $\mathscr{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Sa norme est :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Le vecteur vitesse est donc :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

Soit autrement :

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\end{aligned}$$

En posant $\dot{x} = v_x, \dot{y} = v_y$ et $\dot{z} = v_z$, les composantes du vecteur $\vec{v}$, on obtient :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

La norme de $\vec{v}$ est :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Vecteur accélération :

Définition : Le vecteur accélération instantanée $\vec{a}$, d'un mobile ponctuel, en un point M, est la dérivée du vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps, ou la dérivée seconde du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

Vecteur accélération et cordonnées cartésiennes :

Dans le repère cartésien $\mathscr{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et avec les expressions qui précèdent on obtient :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

Donc, on peut écrire autrement :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

C'est-à-dire :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

En posant $\ddot{x} = a_x, \ddot{y} = a_y$ et $\ddot{z} = a_z$, les composantes du vecteur $\vec{a}$, on obtient :

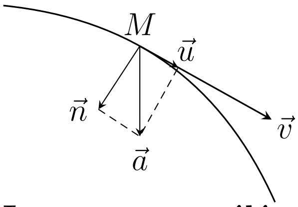
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Dans le repère d'espace cartésien le vecteur $\vec{a}$ est toujours dirigé vers la concavité du trajectoire rectiligne, sa mesure s'exprime en $\mathrm{m/s^2}$.
La norme du vecteur accélération peut être calculée par :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vecteur accélération et base de Frenet :

Le mobile ponctuel M décrit une trajectoire que nous supposerons plane.
. Le vecteur vitesse, à la date t, est tangente à cette trajectoire et a le sens du mouvement, et le vecteur accélération est dirigé vers la concavité du trajectoire.
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement et $\vec{n}$ le vecteur unitaire orthogonal au vecteur $\vec{u}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire.



La base $(\vec{u}, \vec{n})$ associée au point M, à la date t, constitue le repère de projection de Frenet. Le vecteur $\vec{a}$ se décompose en deux vecteurs, vecteur accélération tangentielle et normale.

Le vecteur accélération tangentielle :

$$\vec{a}_t = a_t\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

L'accélération tangentielle caractérise la variation de la mesure algébrique de la vitesse. **Le vecteur accélération normale :**

$$\vec{a}_n = a_n\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

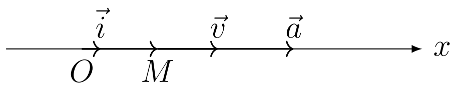
ρ est le rayon de courbure de la trajectoire en M, c'est-à-dire si on parle d'un cercle ρ est le rayon du cercle, si on parle d'une ellipse ρ est son rayon...
On écrit alors dans le repère de Frenet :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_t + \vec{a}_n \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}\end{aligned}$$

Le mouvement :

Mouvement rectiligne :

Les mouvements rectilignes sont des mouvements dont les trajectoires sont droites.



Le vecteur position s'écrit dans ce cas :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = v_x\vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}$$

Mouvement rectiligne uniforme :

Définition : Le point M est dit en mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et si son vecteur vitesse est constant par rapport au temps :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = \overrightarrow{\mathrm{Cte}}$$

Donc sa dérivée par rapport au temps, qui est l'accélération est nulle :

$$\vec{a} = \vec{0}$$

L'équation horaire du mouvement : Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_0 \\ \mathrm{d}x &= v_0\mathrm{d}t \\ \int \mathrm{d}x &= \int v_0\mathrm{d}t \\ x &= v_0t + c\end{aligned}$$

On pose $c = x_0$ l'abscisse à l'instant t_0, d'où l'équation horaire suivante :

$$x = v_0t + x_0$$

Mouvement rectiligne uniformément varié :

Définition : Le point M est dit en mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et si son vecteur d'accélération est constant :

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{Cte}}$$

Les équations horaires du mouvement : Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniformément varié :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
a\ \mathrm{d}t &= \mathrm{d}v \\
\int a\ \mathrm{d}t &= \int \mathrm{d}v \\
at + c &= v \\
at + v_0 &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
at + v_0 \mathrm{d}t &= \mathrm{d}x \\
\int at + v_0 &= \int \mathrm{d}x \\
\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + c' &= x
\end{aligned}$$

En posant $c' = x_0$, on obtient :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Les équations horaires sont :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\
v &= at + v_0
\end{aligned}$$

Mouvement accéléré et retardé :

Un mouvement est dit accéléré si la norme de son vecteur vitesse croît au cours du temps :

$$\vec{v}.\vec{a} > 0$$

Un mouvement est retardé si la norme de son vecteur vitesse décroît au cours du temps :

$$\vec{v}.\vec{a} < 0$$

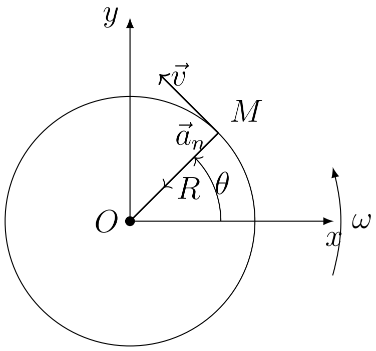
Mouvement circulaire :

Mouvement circulaire uniforme :

Définition : Un mouvement circulaire est dit uniforme si la valeur algébrique de la vitesse du point mobile est constante : $v = v_0$
La vitesse angulaire d'un mouvement circulaire uniforme est :

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}$$

Elle est exprimée en rad/s. R est le rayon de la trajectoire circulaire.



Dans un mouvement circulaire uniforme :
L'accélération tangentielle est nulle :

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$

Le vecteur accélération normale est exprimé par :

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Période et fréquence :

. La période d'un mouvement circulaire uniforme est la durée d'un tour.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Elle est exprimée en (s).
. La fréquence d'un mouvement circulaire uniforme est le nombre de tours par seconde.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Elle est exprimée en (Hz).

Les équations horaires :

Équation horaire angulaire : On va utiliser l'expression de ω pour aboutir à cette équation :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$
$$\omega \mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta$$
$$\int \omega \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta$$
$$\omega t + c = \theta$$

En posant $c = \theta_0$ l'angle à $t = 0$, on trouve :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Équation horaire curviligne : On rappelle que : $s = R\theta$, on multiplie les membres de l'équation précédente par R et on la trouve :

$$s = v_0 t + s_0$$

s signifie l'arc parcouru à l'instant t, il s'exprime en (m).

Les lois de Newton :

La première loi de Newton :

Énoncée : Dans un référentiel galiléen, tout corps isolé (aucune force n'est appliquée) ou pseudo-isolé (la somme des forces est nulle) est soumis d'un mouvement rectiligne uniforme $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ ou il est immobile $\vec{v} = \vec{0}$.
On rappelle qu'un référentiel est dit galiléen ou inertiel, si le principe d'inertie reste applicable.
Pour déterminer le mouvement d'un mobile, il est nécessaire de choisir un corps référentiel indéformable. On associe au corps référentiel un repère d'espace ($\mathscr{R}$) déterminé par son origine O sa base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La deuxième loi de Newton :

Énoncée : Dans un repère galiléen, la somme des forces qui s'exercent sur un corps est égale au produit de la masse du corps et de son vecteur d'accélération.
Mathématiquement :

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$

Cette loi est appelée *Le principe fondamentale de la dynamique.* Le principe d'inertie n'est qu'une conséquence de cette loi, car lorsque $\vec{v} = \overrightarrow{Cte}$ l'accélération devient nulle, d'où la somme des forces est nulle. On dit que le système est en équilibre.

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$$

La troisième loi de Newton :

Énoncée : Lorsqu'il y a une interaction entre deux corps A et B, le corps A exerce une force sur le corps B, on la note $\vec{F}_{A/B}$, et le corps B exerce une force de même intensité $\vec{F}_{B/A}$ ces deux vecteurs sont liés vectoriellement par la relation suivante :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Leur intensité est :

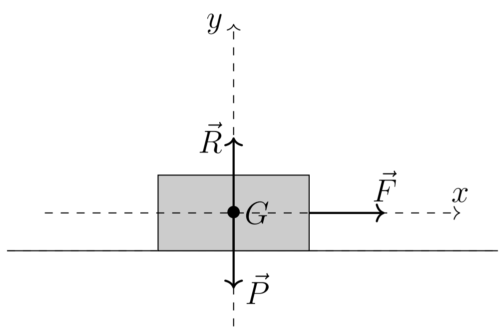
$$F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{m_A m_B}{d^2}$$

G est la constante de gravitation universelle elle vaut $6,67 \times 10^{-11}\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$, et d la distance qui les sépare.

Applications :

Cas du mouvement sur un plan horizontal sans frottement :

On considère un corps solide (S) en mouvement sur un plan horizontal sans frottement sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ comme l'indique la figure suivante :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \\ \vec{F} & : \text{La force appliquée au } (S) \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$.
On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y). Trouvons l'expression de $\|\vec{a}\|$:

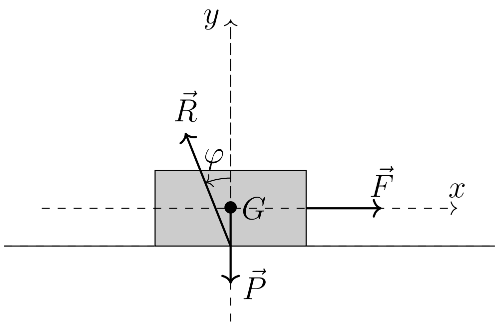
On projette les forces et on trouve :

$$\begin{cases} F+0+0 & = ma_x \\ R-P+0 & = ma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F & = ma \\ R-P & = 0 \end{cases}$$

Donc : $a = \dfrac{F}{m}$

Cas du mouvement sur un plan horizontal avec frottement :

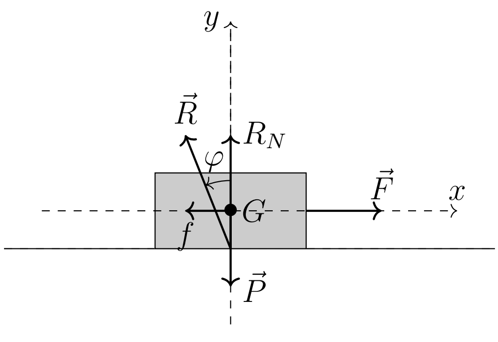
On considère un corps solide (S) en mouvement sur un plan horizontal avec frottement sous l'action d'une force constante $\vec{F}$ comme l'indique la figure suivante :



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \\ \vec{F} & : \text{La force appliquée au } (S) \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$.
On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y).



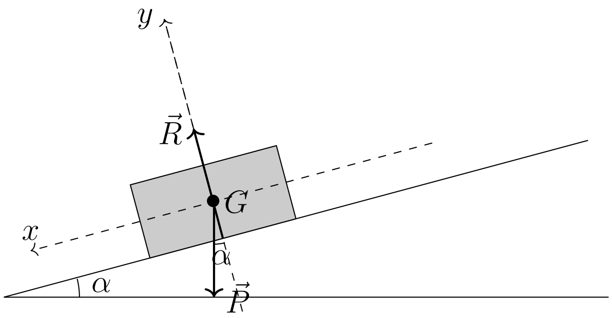
$$\begin{cases} F-f & = ma_x \\ R_N-P & = ma_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f & = F-ma \\ R_N & = P \end{cases}$$

La norme du vecteur $\vec{R}$ est donnée par : $\|\vec{R}\| = \sqrt{f^2 + R_N^2}$.
Le coefficient de frottement est donné par :

$$\kappa = \tan\varphi = \frac{f}{R_N} \Longleftrightarrow \varphi = \arctan\kappa$$

Cas du mouvement sur un plan incliné sans frottement :

On libère un corps solide (S) de masse m sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale et il glisse sans frottement vers le bas.



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton :

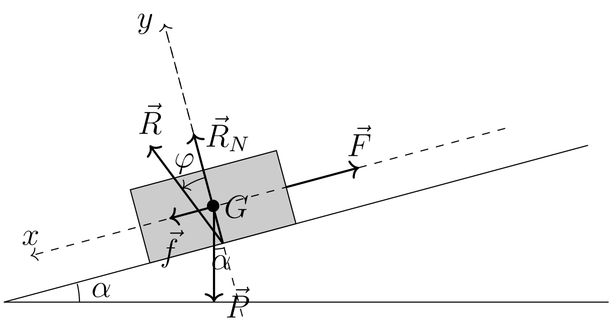
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y). Trouvons l'expression de $\|\vec{a}\|$:

$$\begin{cases} P\sin\alpha & = ma \\ R - P\cos\alpha & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = g\sin\alpha$$

Cas du mouvement sur un plan incliné avec frottement :

On tire un corps solide (S) de masse m sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale en utilisant une corde, il glisse avec frottement vers le haut.



Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \\ \vec{T} & : \text{La tension du corde} \end{cases}$$

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

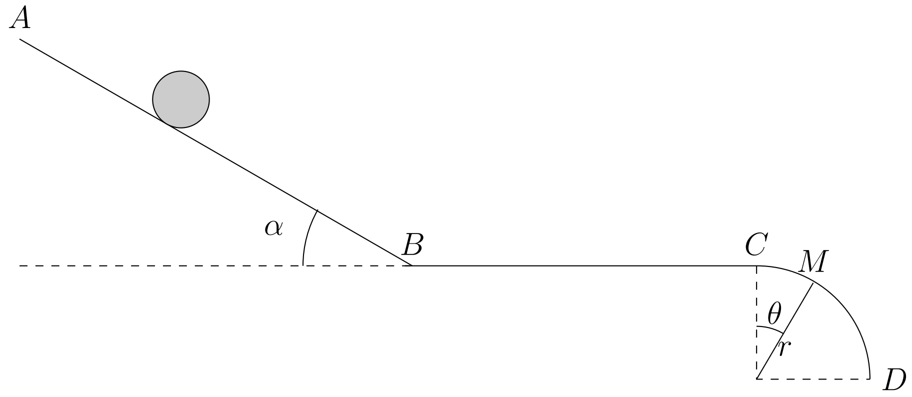
On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y).

$$\begin{cases} f + P\sin\alpha - F & = ma \\ R_N - P\cos\alpha & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f & = F + m(a - g\sin\alpha) \\ R_N & = P\cos\alpha \end{cases}$$

Donc : $R = \sqrt{f^2 + R_N^2}$

Cas du mouvement curviligne :

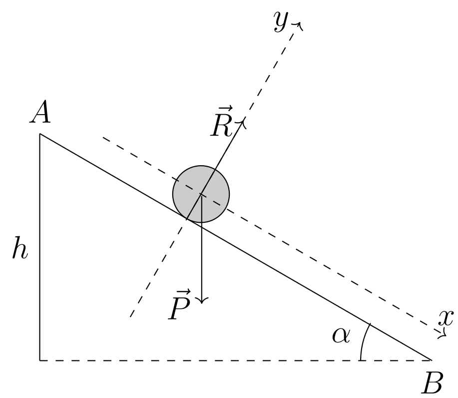
Une bille (S) de masse m se déplace sur un un rail $ABCD$, contenant trois portions, comme l'indique la figure suivante :



. La portion AB est inclinée d'une angle α où le mouvement se fait sans frottement.
. La portion BC horizontale où le mouvement se fait avec frottement.
. La portion CD est circulaire de rayon r, le mouvement se fait sans frottement.

Déterminons $\|\vec{a}\|$: Le système étudié : $\{(S)\}$
Le bilan des forces :

$$\begin{cases} \vec{P} & : \text{Le poids du corps} \\ \vec{R} & : \text{La réaction du plan} \end{cases}$$



D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

On considère le référentiel terrestre supposé galiléen auquel on associe un repère (G, x, y). Trouvons l'expression de $\|\vec{a}\|$:

$$\begin{cases} P\sin\alpha & = ma \\ R - P\cos\alpha & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = g\sin\alpha$$

Supposant que $v_A = 0\text{m/s}$, déterminons la vitesse au point B v_B, en utilisant le théorème d'énergie cinétique :
Rappel :
Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W\left(\vec{F}\right)$$

L'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Le travail d'une force :

$$W\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\vec{l} = F.l.\cos\left(\widehat{\vec{F};\vec{l}}\right)$$

$$W\left(\vec{P}\right) = \pm mgh$$

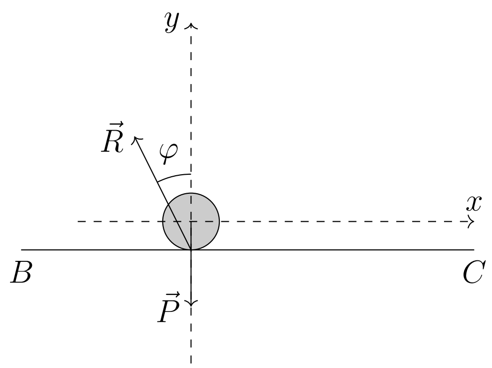
Réponse : On a d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum W \iff E_{c_B} - \underbrace{E_{c_A}}_{0} = W\left(\vec{P}\right) + \underbrace{W\left(\vec{R}\right)}_{0}$$

$$\iff \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$$

$$\iff v_B = \sqrt{2gAB\sin\alpha}$$

Sur la portion BC la bille glisse en frottement jusqu'à son arrêt au point C, déterminons $\|\vec{a}\|$:



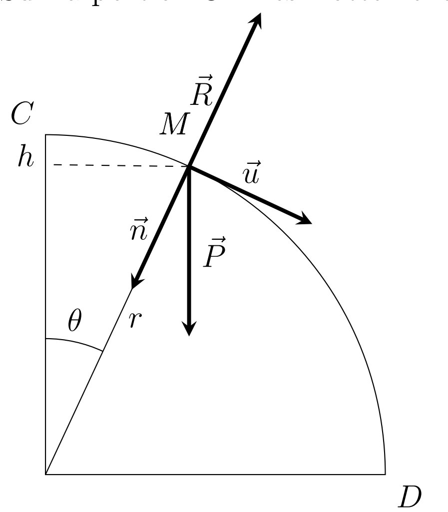
D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Par projection sur l'axe des abscisses on trouve :

$$-f = ma \iff a = -\frac{f}{m}$$

Sur la portion CD les frottements sont négligeables, la balle (S) est animé par un point M :



On utilise le repère de Frenet, d'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \iff \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Sur l'axe $(M, \vec{u})$ on a $P\sin\theta = ma_t$, et l'axe $(M, \vec{n})$ on a $+P\cos\theta - R = ma_n$, par suite :

$$\begin{cases} P\sin\theta & = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ P\cos\theta - R & = m\dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

On a :

$$R = P\cos\theta - m\frac{v^2}{r}$$

v ici signifie la vitesse en point M, trouvons son expression, d'après le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$\begin{aligned}\Delta E_c = \sum W &\iff E_{c_M} - \underbrace{E_{c_C}}_{0} = W\left(\vec{P}\right) + \underbrace{W\left(\vec{R}\right)}_{0} \\ &\iff \frac{1}{2}mv_M^2 = mgh \\ &\iff \frac{1}{2}v_M^2 = gr(1-\cos\theta) \\ &\iff v_M = \sqrt{2gr(1-\cos\theta)}\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}R &= P\cos\theta - m\frac{v_M^2}{r} \\ &= mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) \\ &= 3mg\cos\theta - 2mg \\ &= mg(3\cos\theta - 2)\end{aligned}$$

D'où $R = mg(3\cos\theta - 2)$