- Chimie -

1- Etude d'une solution aqueuse d'un acide HA :

1-1- Equation chimique de la réaction :

$$HA_{(aq)} + H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows A^-_{(aq)} + H_3O^+_{(aq)}$$

1-2- * Taux d'avancement final τ :

- $\tau = \frac{x_f}{x_m} = \frac{[H_3O^+]}{C} \Rightarrow \tau = \frac{10^{-pH}}{C}$

- **A.N :** $\tau = \frac{10^{-3,44}}{10^{-2}} \approx 0,0363 = 3,63\%$

*** Espèce chimique prédominante :**

- $\tau = \frac{[A^-]}{C} = \frac{[A^-]}{[AH]+[A^-]} \Rightarrow \frac{[AH]+[A^-]}{[A^-]} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{[AH]}{[A^-]} + 1 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{1-\tau}{\tau}$

- **A.N :** $\frac{[AH]}{[A^-]} = \frac{1-0,0363}{0,0363} \approx 26,5$ c.à.d $[AH] >> [A^-] \Rightarrow AH$ est l'espèce prédominante.

1-3- * Expression de pK_A :

- $pK_A = -Log(K_A) = -Log(\frac{[H_3O^+] \times [A^-]}{[AH]})$ (1)

- $[H_3O^+] = [A^-] = 10^{-pH}$ (2) et $[AH] = C - [H_3O^+] = C - 10^{-pH}$ (3)

- On remplace (2) et (3) dans (1), on aura : $pK_A = -Log(\frac{10^{-2.pH}}{C - 10^{-pH}})$

*** Valeur de pK_A :** $pK_A = -Log(\frac{10^{-2\times3,44}}{10^{-2} - 10^{-3,44}}) \approx 4,86$

1-4-1- Equation chimique de la réaction :

$$AH_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow A^-_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}$$

1-4-2- Valeur de V_B pour lequel $pH = 5,50$:

- Dressons le tableau d'avancement :

Equation de la réaction		$AH_{(aq)}$	+ $HO^-_{(aq)}$	$\rightarrow A^-_{(aq)}$	+ $H_2O_{(\ell)}$
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$C.V_A$	$C.V_B$	0	en excès
Etat final	x_{max}	$C.V_A - x_{max}$	$C.V_B - x_{max}$	x_{max}	en excès

- Pour $V_B < V_{BE} = 20mL$: le réactif limitant est l'espèce HO^- ; donc :
$C.V_B - x_{max} = 0$ ou $x_{max} = C.V_B$

m.k1957@hotmail.com

- On sait que : $pH = pK_A + Log(\frac{[A^-]}{[AH]}) \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = 10^{pH - pK_A}$ (1)

- D'autre part : $\frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{x_{max}}{C.V_A - x_{max}} \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{C.V_B}{C.V_A - C.V_B} \Rightarrow \frac{[A^-]}{[AH]} = \frac{V_B}{V_A - V_B}$ (2)

- Les deux relations (1) et (2) conduisent à écrire :

$$\frac{V_B}{V_A - V_B} = 10^{pH - pK_A} \Rightarrow \underline{V_B = V_A \cdot \frac{10^{pH - pK_A}}{1 + 10^{pH - pK_A}}}$$

- **A.N :** $V_B = 20 \times \frac{10^{5,50-4,86}}{1+10^{5,50-4,86}} \underline{\approx 16,3 mL}$

2- Hydrolyse d'un ester :

2-1- Equation chimique de la réaction :

$$CH_3 - \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H - \overset{\displaystyle O}{\overset{||}{C}} - O - CH_2 - CH_3 + H_2O \rightleftarrows CH_3 - \underset{\displaystyle CH_3}{\underset{|}{C}}H - \overset{\displaystyle O}{\overset{||}{C}} - OH + HO - CH_2 - CH_3$$

2-2- Temps de demi-réaction de la transformation (1) :

Equation de la réaction		$Ester$	$+ H_2O$	$\rightleftarrows Acide$	$+ Alcool$
Etat du système	Avancement x(mol)	Quantités de matière (mol)			
Etat initial	0	$n_0(E)$	$n_0(E)$	0	0
Etat intermédiaire t = $t_{1/2}$	$X(t_{1/2})$	$n_0(E) - x(t_{1/2})$	$n_0(E) - x(t_{1/2})$	$x(t_{1/2})$	$x(t_{1/2})$
Etat final	X_f	$n_0(E) - x_f$	$n_0(E) - x_f$	x_f	x_f

- Cherchons la quantité de matière restante $n_{t_{1/2}}(E)$ de l'ester E à l'instant $t_{1/2}$:

- On a d'après le tableau : $n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - x(t_{1/2})$ avec $x(t_{1/2}) = \frac{x_f}{2}$ et $n_f(E) = n_0(E) - x_f$

- Donc on peut écrire : $n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - \frac{x_f}{2} \Rightarrow n_{t_{1/2}}(E) = n_0(E) - \frac{n_0(E) - n_f(E)}{2}$

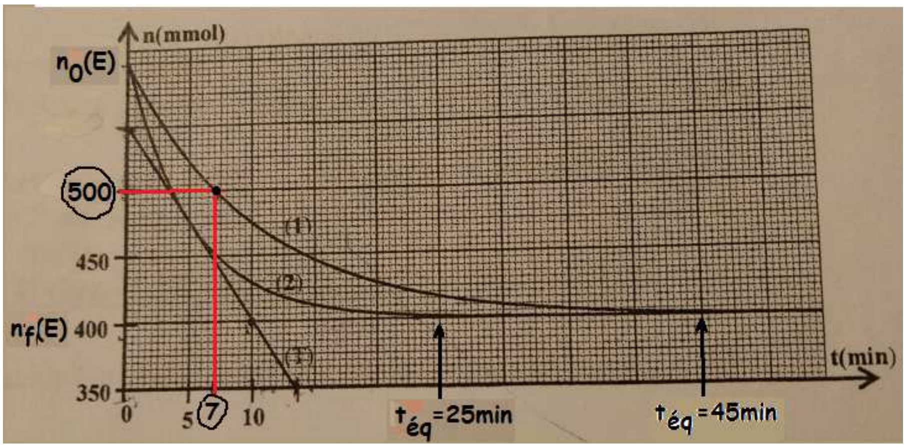
$$\underline{n_{t_{1/2}}(E) = \frac{n_0(E) + n_f(E)}{2}}$$

- Graphiquement, on trouve : $n_0(E) = 600 mmol$ et $n_f(E) = 400 mmol$

- **A.N :** $n_{t_{1/2}}(E) = \frac{600 + 400}{2} \underline{= 500 mmol}$

On repère la quantité 500mmol sur l'axe vertical, et par projection on trouve le temps de demi-réaction :

$t_{1/2} \approx 7\,\text{min}$



2-3- Courbe correspondant à la réaction sans catalyseur :

La courbe (1) correspond à la réaction d'hydrolyse sans catalyseur, car l'équilibre est atteint après écoulement de 45min, contrairement à l'écoulement uniquement de 25min pour atteindre l'équilibre en utilisant un catalyseur correspondant à la courbe (2).

2-4- Vitesse volumique de réaction à $t_1 = 5\,\text{min}$:

- Par définition : $v(t) = \dfrac{1}{V_0}.\dfrac{dx(t)}{dt}$ avec $x(t) = n_0(E) - n_t(E)$

- L'expression devient : $v(t) = -\dfrac{1}{V_0}.\dfrac{dn_t(E)}{dt}$

- A $t_1 = 5\,\text{min}$: $v(5\,\text{min}) \approx -\dfrac{1}{V_0}.\dfrac{\Delta n_t(E)}{\Delta t} = -\dfrac{1}{71.10^{-3}} \times \dfrac{(550-400).10^{-3}}{0-10}$

$v(5\,\text{min}) \approx 0{,}21 mo\ell.L^{-1}.\text{min}^{-1}$.

3- Electrolyse de l'eau :

3-1- Les affirmations exactes :

a) L'anode est liée à la borne positive du générateur ;
b) Une transformation forcée s'effectue dans le sens inverse d'une transformation spontanée.
d) Le courant électrique sort par la cathode de l'électrolyseur.

3-2- Equation de la réaction à l'anode :

A l'anode, il se produit une réaction d'oxydation de l'espèce H_2O :

$$2.H_2O_{(\ell)} \rightleftarrows O_{2(g)} + 4.H^+_{(aq)} + 4.e^-$$

3-3- * Expression du volume de O_2 formé à l'instant t :

- En se basant sur le tableau d'avancement, on trouve :

$n(e^-) = 4.x = 4.\ n(O_2) = 4.\dfrac{V}{V_m}$ et $n(e^-) = \dfrac{I \times \Delta t}{N_A \times e}$

donc $V = \dfrac{I.\Delta t}{4.N_A.e}.V_m$

$2.H_2O_{(\ell)}$ $\rightleftarrows$	$O_{2(g)}$ +	$4.H^+_{(aq)}$ +	$4.e^-$
n_0	0	0	0
$n_0 - 2.x$	$n(O_2) = x$	$4.x$	$n(e^-) = 4.x$

- **A.N :** $V=\frac{0{,}2\times 8\times 60}{4\times 6{,}02.10^{23}\times 1{,}6.10^{-19}}\times 24\approx 5{,}6.10^{-3}L=5{,}6mL$

- Physique -

Exercice 1 : Transformations nucléaires

1- Radioactivité α du radium $^{226}_{88}Ra$:

1-1- Définition :

L'énergie de liaison d'un noyau atomique est l'énergie qu'il faut fournir au noyau pour le dissocier en ses nucléons,

1-2- La proposition juste :

c) Après une durée égale à $3.t_{1/2}$; il reste $12{,}5\%(=\frac{100}{2^3}\%)$ des noyaux initiaux.

(On applique la relation : $N(n.t_{1/2})=\frac{1}{2^n}\times N_0$)

1-3- Montrons que $1Ci\approx 3{,}73.10^{10}Bq$:

- La curie 1Ci est l'activité de 1g de radium 226 ;

- $1Ci=A(m=1g)\ \Rightarrow 1Ci=\lambda.N(m=1g)\Rightarrow 1Ci=\lambda.\frac{m(=1g)}{m_{noy}}\Rightarrow 1Ci=\lambda.\frac{m(=1g)}{M}.N_A$

- **A.N :** $1Ci=1{,}4.10^{-11}\times\frac{1}{226}\times 6{,}02.10^{23}\approx 3{,}73.10^{10}Bq$

1-4- L'activité d'un échantillon en Juin 2018 :

- En Juin 1898 : A(to = 0) = 1Ci = $3{,}73.10^{10}$Bq
- En Juin 2018 : $A(t)=A(t_0=0).e^{-\lambda.t}$ $avec\ \ t=\Delta t=2018-1898=120ans$
- **A.N :** $A(t)=3{,}73.10^{10}\times e^{-(1{,}4.10^{-11}\times 120\times 365{,}25\times 24\times 3600)}\approx 3{,}54.10^{10}Bq$

1-5- Calcul de l'énergie produite par la désintégration d'un noyau du radium 226 :

- L'équation de désintégration est : $^{226}_{88}Ra\rightarrow\ ^{222}_{86}Rn+\ ^{4}_{2}He$

- L'énergie libérée est : $E_{\ell ib}=|\Delta E|=\left|\left(E_\ell(^{226}_{88}Ra)-E_\ell(^{4}_{2}He)-E_\ell(^{222}_{86}Rn)\right)\right|$

- **A.N :** $E_{\ell ib}=\left|1{,}7311.10^3-28{,}4-1{,}7074.10^3\right|\approx 4{,}7MeV$

2- Mouvement de α dans un champ magnétique uniforme :

2-1- Nature du mouvement de la particule α :

* Expression de l'accélération :

La particule α est soumise uniquement à la force de Lorentz : $\vec{F}=2e.\vec{v}\wedge\vec{B}$

Par application de la 2ème loi de Newton dans un référentiel galiléen : $m(\alpha).\vec{a}=2e.\vec{v}\wedge\vec{B}$

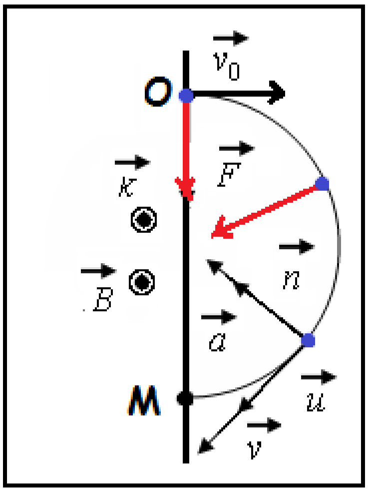
On en déduit : $\vec{a}=\dfrac{2e}{m(\alpha)}.\vec{v}\wedge\vec{B}$; cette relation montre que le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}$.

* Energie cinétique de la particule **α** :

On a : $\dfrac{dE_c}{dt}=\underbrace{P}_{puissance}(\vec{F})=\vec{F}.\vec{v}=0$ $car\ \vec{F}\ est\ perpendiculaire\ à\ \vec{v}$

Cela prouve que l'énergie cinétique de la particule est constante, et par suite le mouvement est **uniforme**.

* Le mouvement de **α** est plan :



Posons $\vec{B}=B\vec{k}$ alors $\vec{a}=\dfrac{2eB}{m(\alpha)}.\vec{v}\wedge\vec{k}$ ce qui montre que la composante a_z de l'accélération est nulle $a_z=0$

et par intégration et application des conditions initiales on en déduit que $z=0$

Donc le mouvement de **α** se fait dans le plan (π).

* Le mouvement de **α** est circulaire :

Dans le repère de Fresnet M$(\vec{u},\vec{n})$; la composante tangentielle de l'accélération est nulle :

$$a=a_n \quad avec\ a=\frac{2eB}{m(\alpha)}v_0 \quad et \quad a_n=\frac{v_0^2}{\rho} \qquad \rho\ est\ le\ rayon\ de\ courbure$$

On écrit alors : $a=\dfrac{2eB}{m(\alpha)}v_0=\dfrac{v_0^2}{\rho}$ ou bien : $\rho=\dfrac{m(\alpha).v_0}{2eB}=Cte$

Donc le mouvement est <u>circulaire</u> et <u>uniforme</u>, et le rayon est : $OM=R=\dfrac{m(\alpha).v_0}{2eB}$

- **A.N :** $OM=\dfrac{6,6447.10^{-27}\times1,5.10^{7}}{2\times1,6.10^{-19}\times1,5}\approx0,207m=20,7cm$

Exercice 2 : Electricité

I- Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension :

1- Equation différentielle vérifiée par la tension u_c :

D'après la figure1 : $u_R+u_C=E$ (1)

En respectant les conventions : $u_R=R.i=R.\dfrac{dq}{dt}=RC.\dfrac{du_C}{dt}$

La relation (1) devient : $RC.\dfrac{du_C}{dt}+u_C=E$ ou bien $\dfrac{du_C}{dt}+\dfrac{1}{RC}u_C=\dfrac{E}{RC}$

2- * Détermination de E :

- L'équation de la fonction $\frac{du_C}{dt} = f(u_C)$ est de la forme : $\frac{du_C}{dt} = A.u_C + B$
- L'équation différentielle peut s'écrire : $\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{E}{RC}$
- Lorsque $\frac{du_C}{dt} = 0$ alors $E = u_C$ et graphiquement (figure2) on trouve $\underline{E = 6V}$

*** Vérification de C = 10 nF :**

- On pose $A = -\frac{1}{RC}$: *le coefficient directeur de la droite*

Alors $C = -\frac{1}{R \times A} = -\frac{1}{2.10^3 \times \frac{6 \times 5.10^4 - 0}{0-6}} \Rightarrow \underline{C = 10^{-8} F = 10nF}$

3- Détermination de la valeur du rendement ρ :

- Par définition : $\rho = \frac{E_e}{E_g}$
- En régime permanent $u_C(\infty) = E$ alors $E_e = \frac{1}{2}.C.u_C^2 = \frac{1}{2}.C.E^2$ et $E_g = C.E^2$
- Donc : $\rho = \frac{E_e}{E_g} = \frac{\frac{1}{2}.C.E^2}{C.E^2} \Rightarrow \underline{\rho = 0{,}50 = 50\%}$

II - Réponse d'un dipôle RL à un échelon de tension :

1-1- Equation différentielle vérifiée par $i(t)$:

- D'après la loi d'additivité des tensions : $u_b + u_{R_1} = E$ (1)
- En respectant les conventions : $u_b = L.\frac{di}{dt} + r.i$ et $u_{R_1} = R_1.i$

Alors (1) s'écrit : $L.\frac{di}{dt} + (r + R_1).i = E$ ou bien $\underline{\frac{di}{dt} + \frac{(r+R_1)}{L}.i = \frac{E}{L}}$

1-2- * Détermination de R1 :

- Au régime permanent : $\underbrace{\left(\frac{di}{dt}\right)_{t\to\infty}}_{=0} + \frac{(r+R_1)}{L}.i_{max} = \frac{E}{L} \Rightarrow (r+R_1).i_{max} = E$
- Finalement : $\underline{R_1 = \frac{E}{i_{max}} - r}$
- **A.N :** $R_1 = \frac{6}{50.10^{-3}} - 20 = \underline{100\Omega}$

*** Vérification de L = 0,3H :**

- La constante de temps du circuit RL : $\tau = \dfrac{L}{r+R_1}$
- On en déduit que : $L = \tau \times (r+R_1)$ avec $\tau = 2{,}5ms\,(figure4)$
- **A.N :** $L = 2{,}5.10^{-3} \times (20+100) = 0{,}3H$

1-3- Calcul de u_b au régime permanent :

- L'équation différentielle donne : $(u_b)_\infty = E - (u_{R_1})_\infty \Rightarrow (u_b)_\infty = E - R_1.i_{max}$
- **A.N :** $(u_b)_\infty = 6 - 100 \times 0{,}05 = 1V$

2-1- Valeur de i juste après l'ouverture de l'interrupteur K :

L'intensité $i(t)$ est une fonction continue : $i(t=0) = i_{max} = 50mA$

2-2- * Valeur de $\dfrac{d\,i(t)}{dt}$ à t = 0 :

- D'après la loi d'additivité des tensions : $u_b + u_{R_1} + u_{R_2} = 0$ (1)
- En respectant les conventions : $u_b = L.\dfrac{di(t)}{dt} + r.i$ $u_{R_1} = R_1.i$ et $u_{R_2} = R_2.i$

Alors (1) s'écrit : $L.\dfrac{di}{dt} + (r+R_1+R_2).i = 0$ ou bien $\left(\dfrac{d\,i(t)}{dt}\right)_{t=0} = -\dfrac{(r+R_1+R_2)}{L}.i_{max}$

- **A.N :** $\left(\dfrac{d\,i(t)}{dt}\right)_{t=0} = -\dfrac{(20+100+2000)}{0.3} \times 50.10^{-3} = -3{,}53.10^2\,A.s^{-1}$

*** Calcul de u_b à l'ouverture de l'interrupteur K :**

- L'expression est : $u_b(0) = L.\left(\dfrac{di(t)}{dt}\right)_{t=0} + r.\,i_{max}$
- **A.N :** $u_b(0) = 0{,}3 \times (-3{,}53.10^2) + 20 \times 0{,}05 \approx -105V$

3- Rôle de la branche :

C'est pour éviter l'apparition des étincelles aux bornes de l'interrupteur au moment de son ouverture ; qui sont dues à la surtension aux bornes de la bobine : $u_b(0) \approx -105V$!!

III - Oscillateur RLC en régime forcé :

1- Fréquence de résonance N_0 :

- A la résonance l'impédance Z du circuit RLC est **minimale** ;
- D'après la figure5 ; on trouve : $N_0 = 0{,}5KHz = 500Hz$

2- Capacité C_1 du condensateur :

- A la résonance ; la relation est vérifiée : $L.C_1.(2\pi N_0)^2 = 1$

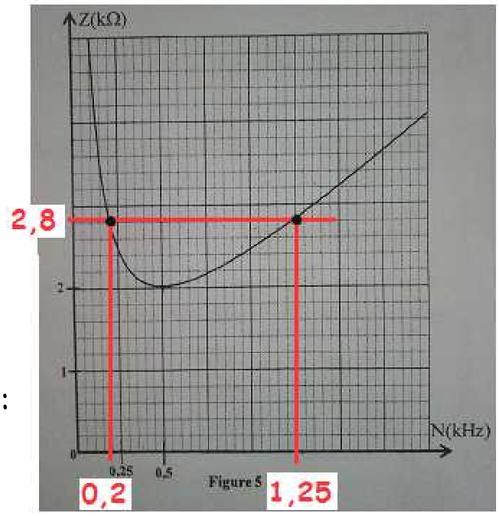
- On en déduit que : $C_1 = \dfrac{1}{4.\pi^2.L.N_0^2}$

- **A.N :** $C_1 = \dfrac{1}{4\times10\times0{,}3\times500^2} \approx 3{,}3.10^{-7}F = 0{,}33\mu F$

3- * Relation entre Z , r et R₃ :

- Pour $I = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ on a : $U = Z.I = Z.\dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$
- A la résonance $I = I_0$ on a : $U = Z_0.I_0 = (r+R_3).I_0$
- Des deux relations on trouve : $Z = (r+R_3).\sqrt{2}$

* Déduction graphique de ΔN :



- Calcul de Z lorsque $I = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$:

$Z = (20+1980).\sqrt{2} \approx 2828\Omega \approx 2{,}8K\Omega$

- En exploitant la courbe de la fonction $Z = f(N)$; on trouve :

$N_{min} \approx 0{,}2KHz$ et $N_{max} \approx 1{,}25Kz$

d'où : $\Delta N = N_{max} - N_{min} \approx 1{,}25 - 0{,}2 = 1{,}05KHz$

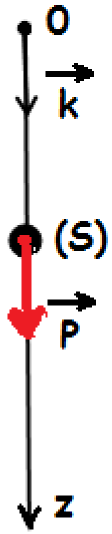
Exercice 3 : Mécanique

PARTIE I : Etude du mouvement d'un corps solide

1- Etude du mouvement du centre G dans l'air :

1-1- Equation différentielle régissant la vitesse Vz du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {Le baigneur (S)}
- Repère d'étude R (O ; $\vec{k}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :



Poids du corps seulement car la chute est libre : $\vec{P}$

- 2ème loi de newton : $\vec{P} = m.\vec{a}_G$
- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz : $P_z = m.a_z$ (*)
- Expression : $P_z = P = m.g$ et $a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$.
- La relation (*) devient : $m.g = m.\dfrac{dv_z}{dt}$
- Finalement l'équation différentielle est : $\dfrac{dv_z}{dt} = g$ (1)

1-2- * Temps de chute tc :

En intégrant l'équation (1) : $v_z(t) = g.t$ (2) $(v_z(0) = 0)$

En intégrant l'équation (2) : $z(t)=\frac{1}{2}g.t^2$ (3) $(z(0)=0)$

Le temps de chute tc correspond à : $z(t_c)=h$

Donc : $\frac{1}{2}g.t_c^2=h \Rightarrow t_c=\sqrt{\frac{2.h}{g}}$

- A.N : $t_c=\sqrt{\frac{2\times 10}{10}}\approx 1{,}4s$

* Vitesse **Ve** d'entrée dans l'eau :

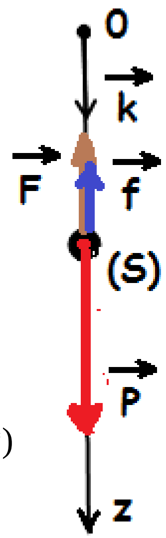
- La relation (2) donne : $v_z(t_c)=g.t_c$

- A.N : $v_e=v_z(t_c)=10\times 1{,}4=14m.s^{-1}$

2- Etude du mouvement vertical du centre G dans l'eau :

2-1- Equation différentielle régissant la vitesse V_z du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {Le baigneur (S)}
- Repère d'étude R (O ; $\vec{k}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :



* Poids du corps : $\vec{P}=m.\vec{g}=mg.\vec{k}$

* Force de frottement fluide : $\vec{f}=-\lambda.\vec{v_G}=-\lambda v_z.\vec{k}$

* Poussée d'Archimède: $\vec{F}=-\frac{m}{d}.\vec{g}=-\frac{m}{d}g.\vec{k}$

- 2ème loi de Newton : $m.\vec{a_G}=\vec{F}+\vec{f}+\vec{P}$
- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Oz : $m.a_z=F_z+f_z+P_z$ (*)
- Expressions : $F_z=-\frac{m}{d}.g$; $f_z=-\lambda.v_z$; $P_z=P=m.g$ et $a_z=\frac{dv_z}{dt}$.
- La relation (*) devient : $m.\frac{dv_z}{dt}=(-\frac{m}{d}.g)+(-\lambda.v_z)+(m.g)$
- ou bien : $\frac{dv_z}{dt}+\frac{\lambda}{m}.v_z=g.(1-\frac{1}{d})$
- Finalement l'équation différentielle est : $\frac{dv_z}{dt}+\frac{1}{\tau}.v_z=g.(1-\frac{1}{d})$ $avec\ \tau=\frac{m}{\lambda}$

2-2- * Expression de la vitesse limite $V_{\ell z}$:

- Au régime permanent : $\frac{dv_z}{dt}=0$ et $v_z=v_{\ell z}$
- L'équation différentielle devient : $0+\frac{1}{\tau}.v_{\ell z}=g.(1-\frac{1}{d})$

- Finalement la vitesse limite est : $v_{\ell z} = \tau.g.(1-\frac{1}{d})$

* Calcul de la vitesse limite $V_{\ell z}$:

- **A.N** : $v_{\ell z} = \frac{80}{250}\times 10\times(1-\frac{1}{0,9}) \approx -0,36 m.s^{-1}$

2-3- Expressions de A et B :

- La solution de l'équation différentielle est : $v_z(t) = A + B.e^{-\frac{t}{\tau}}$

- L'équation différentielle peut s'écrire : $\frac{d}{dt}(A+B.e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{1}{\tau}.(A+B.e^{-\frac{t}{\tau}}) = g.(1-\frac{1}{d})$

$$\Rightarrow -\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}.(A+B.e^{-\frac{t}{\tau}}) = g.(1-\frac{1}{d}) \Rightarrow \underbrace{-\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau}B.e^{-\frac{t}{\tau}}}_{=0} + \frac{1}{\tau}.A = g.(1-\frac{1}{d})$$

$$\Rightarrow A = \tau.g.(1-\frac{1}{d}) \quad ou \quad A = v_{\ell z}$$

- $v_z(t=0) = A + B.e^0 = A + B$ et $v_z(t=0) = v_e \quad \Rightarrow B = v_e - v_{\ell z}$

2-4- Instant de retour t_r :

- C'est l'instant où le baigneur s'arrête pour rebrousser chemin : $v_z(t_r) = 0$

- On a aussi : $v_z(t_r) = v_{\ell z} + (v_e - v_{\ell z}).e^{-\frac{t_r}{\tau}}$

- Des deux relations on écrit : $v_{\ell z} + (v_e - v_{\ell z}).e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0$

- Finalement on aboutit à l'expression : $t_r = -\tau.\ell n\left(\frac{-v_{\ell z}}{v_e - v_{\ell z}}\right)$

- **A.N** : $t_r = -\frac{80}{250}.\ell n\left(\frac{-(-0,36)}{14-(-0,36)}\right) \approx 1,18 s$

PARTIE II : Etude du mouvement d'un pendule élastique

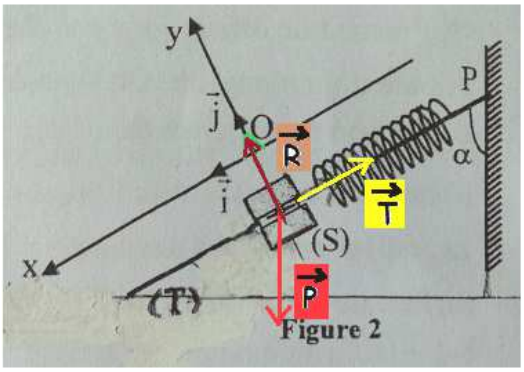


Figure 2

1- Expression de la longueur ℓ_e :

A l'équilibre : $\vec{T}_0 + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, et par projection sur l'axe Ox incliné vers le bas, on aura :

$$T_{0x} + P_x + R_x = 0 \;,$$

Alors : $\boxed{-K.\Delta\ell_{éq} + m.g.\cos(\alpha) + 0 = 0}$ avec $\Delta\ell_{éq} = \ell_e - \ell_0$

d'où : $\ell_e = \ell_0 + \frac{m.g.\cos(\alpha)}{K}$

2-1- Equation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$ du centre d'inertie G :

- Système à étudier : {solide(S)}
- Repère d'étude R (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) supposé galiléen ;
- Bilan des forces extérieures :

* Poids du solide (S) : $\vec{P}$

* Action du ressort : $\vec{T}$

* Action du plan incliné : $\vec{R}$

- La 2ème loi de Newton donne : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$;
- Projection de cette relation vectorielle sur l'axe Ox :

$$P_x + T_x + R_x = m.a_x \Rightarrow mg\cos(\alpha) - K(\Delta\ell_{éq} + x) + 0 = m.\ddot{x} \Rightarrow \underbrace{mg\cos(\alpha) - K.\Delta\ell_{éq}}_{=0} - K.x = m.\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0}$$

2-2- Expression numérique de $x(t)$:

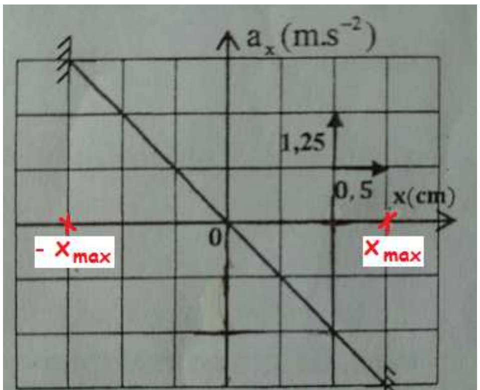


Figure 3

- L'expression de l'abscisse : $x(t) = x_{max}.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \varphi)$
- D'après la figure 3 : $x_{max} = 3\times0{,}5 = \underline{1{,}5cm}$
- L'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}.x = 0 \;\; ou \;\; \ddot{x} = -\frac{K}{m}.x \;\; ou\ bien\ \underline{a_x = -\frac{K}{m}.x}$$

- L'équation de la droite (figure 3) : $\underline{a_x = A.x}$
- En comparant les deux équations ; on identifie le coefficient directeur :

$$-\frac{K}{m} = A = \frac{\Delta a_x}{\Delta x} = \frac{1{,}25 - 0}{-0{,}5.10^{-2} - 0} = -250\,s^{-2}$$

- Or on sait que : $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{-A}$ **A.N :** $\frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{-A} = \sqrt{250} \; \underline{= 15{,}8 rad.s^{-1}} \approx 5.\pi\ rad.s^{-1}$
- D'une part d'après la condition initiale $x(0) = x_{max}$

D'autre part $x(0) = x_{max}.\cos(\frac{2.\pi}{T_0}\times 0 + \varphi) = x_{max}.\cos(\varphi)$

D'où $x_{max}.\cos(\varphi) = x_{max} \Rightarrow \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \underline{\varphi = 0}$

- Finalement : $\underbrace{x}_{\text{en m}}(t) = 1{,}5.10^{-2}.\cos(5.\pi.\underbrace{t}_{en\ s})$

3-1- Expression de l'énergie potentielle E_p :

- L'énergie potentielle totale est : $E_p = E_{pp} + E_{pe}$ (*)
- L'énergie potentielle de pesanteur est : $E_{pp} = m.g.z + C$; l'axe Oz est orienté vers le haut.

Or à $z=0$ on a $E_{pp}=0$ donc C = 0 ; d'où $E_{pp} = -m.g.z$ avec $z = -x.\cos(\alpha)$

Donc $$E_{pp} = -m.g.x.\cos(\alpha) \quad (1)$$

- L'énergie potentielle élastique est : $E_{pe} = \frac{1}{2}.K.\Delta\ell^2 + C'$ avec $\Delta\ell = x + \Delta\ell_{éq}$

Or lorsque $\Delta\ell = \Delta\ell_{éq}$ on a $E_{pe}=0$ donc $C' = -\frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{éq}^2$;

d'où $E_{pe} = \frac{1}{2}.K(x+\Delta\ell_{éq})^2 - \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{éq}^2$

En développant cette expression on aura : $E_{pe} = \frac{1}{2}.Kx^2 + K.x.\Delta\ell_{éq} + \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{éq}^2 - \frac{1}{2}.K.\Delta\ell_{éq}^2$

Donc : $$E_{pe} = \frac{1}{2}.Kx^2 + K.x.\Delta\ell_{éq} \quad (2)$$

- On porte (1) et (2) dans (*), on aura : $E_p = -mg.x.\cos(\alpha) + Kx\Delta\ell_{éq} + \frac{1}{2}.K.x^2$

On peut simplifier cette expression : $E_p = (\underbrace{-mg.\cos(\alpha) + K\Delta\ell_{éq}}_{=0 \text{ à l'équilibre}}).x + \frac{1}{2}.K.x^2$

Finalement on aboutit à l'expression finale : $\underline{E_p = \frac{1}{2}K.x^2}$

3-2- * Valeur de la raideur K :

- L'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement de G : $E_m = E_c + E_p = Cte$
- Lorsque x = x_{max} :

$E_c(x_{max}) = 0 \Rightarrow E_m(x_{max}) = E_p(x_{max}) = \frac{1}{2}K.x_{max}^2$

- Lorsque x = 0 :

$E_m(0) = E_c(0) + \underbrace{E_p(0)}_{=0}$

$\Rightarrow E_m(0) = E_c(0) = 9mJ = 9.10^{-3} J \,(voir \;\; figure4)$

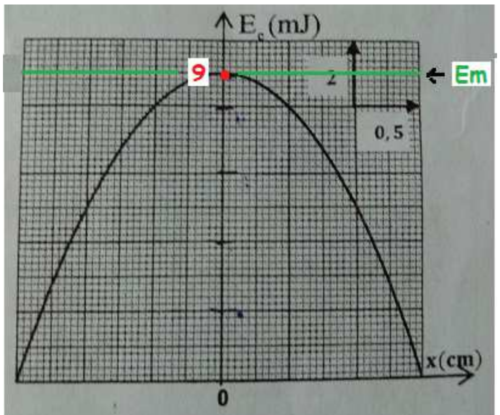


Figure 4

$E_m(x_{max}) = E_m(0) \Rightarrow \frac{1}{2}K.x_{max}^2 = 9.10^{-3}$

- $\Rightarrow K = \frac{2\times 9.10^{-3}}{(1{,}5.10^{-2})^2} = \underline{80 N.m^{-1}}$.

*** Valeur de la masse m :**

On a trouvé que : $\frac{K}{m} = 250\, s^{-2} \Rightarrow m = \frac{K}{250} = \frac{80}{250} = \underline{0{,}32 Kg = 320 g}$