De le Terre à la Lune (11 pts)

Dans l'un de ses célèbres romans intitulé *De la Terre à la Lune*, Jules Verne (1828-1905) relate les aventures de trois héros ayant pris place à l'intérieur d'un énorme projectile qu'un gigantesque canon, baptisé *Colombiad*, propulse en direction de la Lune. Lors de ce périple, Jules Verne fait allusion à un point neutre, situé à une distance d = 350 000 km du centre de la Terre où les forces gravitationnelles exercées par la Terre et la Lune sur le projectile se compensent. On admettra que le voyage s'effectue en ligne droite.

1. Exprimer puis calculer les valeurs des forces d'attraction gravitationnelle qu'exercent respectivement la Terre et la Lune sur le projectile avant son lancement.
2. Comparer les valeurs de ces forces. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
3. En déduire la valeur de l'intensité de la pesanteur terrestre $g_{0(Terre)}$ à l'endroit du lancement.
4. Montrer que le point neutre auquel fait allusion Jules Verne est nécessairement situé entre la Terre et la Lune, sur la droite joignant les centres de ces deux astres.
5. Représenter quelques lignes du champ gravitationnel terrestre, dont celle passant par le centre de la Lune et le point neutre, noté N.
6. Retrouver la valeur de la distance, notée d, séparant le centre de la Terre du point neutre annoncé par Jules Verne.
7. On considère que le projectile est arrivé sur la surface de la Lune. Calculer le champ de pesanteur lunaire et le comparer à celui de la Terre.

Données :

- distance moyenne Terre-Lune (centre à centre) : d_{TL} = 384 000 km
- masse et rayon de la Terre : $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg ; R_T= 6380 km
- masse et rayon de la Lune: $M_L = 7{,}35.10^{22}$ kg ; R_T= 1737 km
- masse du projectile : M_p = 9625 kg
- constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}

Correction : 11 pts

1. A la surface terrestre, la valeur de la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur le projectile est :

$$F_{T/P} = \frac{G.M_T M_P}{{R_T}^2} \qquad \text{A.N. : } F_{T/P} = \frac{6{,}67.10^{-11} \times 5{,}98.10^{24} \times 9625}{(6380.10^3)^2} = 9{,}43.10^4 \text{ N}$$ 1pt

A la surface terrestre, la valeur de la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Lune sur le projectile est:

$$F_{L/P} = \frac{G.M_L M_P}{(d_{TL} - R_T)^2} \qquad \text{A.N. : } F_{T/P} = \frac{6{,}67.10^{-11} \times 7{,}35.10^{22} \times 9625}{(384.10^6 - 6380.10^3)^2} = 3{,}31.10^{-1} \text{ N}$$ 1pt

2. Comparaison des valeurs des deux forces : $\frac{F_{T/P}}{F_{L/P}} = \frac{9{,}43.10^4}{3{,}31.10^{-1}} = 2{,}85.10^5$

La valeur de la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur un objet à sa surface est environ 285 000 fois plus grande que celle qu'exerce la Lune sur ce même objet. 1pt

3. Un objet situé au voisinage de la surface terrestre est donc soumis uniquement à la force gravitationnelle que la Terre exerce sur lui (l'influence des autres astres tels que la Lune étant négligeable). Cette force s'identifie donc à la valeur de son poids donc :

$F_{T/P}$ = P soit $F_{T/P} = M_P.\, g_{0(Terre)}$ d'où $g_{0(\text{Terre})} = \frac{F_{T/P}}{M_P}$;

A.N. : $g_{0(Terre)}$= 9,43×10^4 / 9625 soit $g_{0(Terre)}$ = 9,80 N.kg^{-1} 1pt

4. D'après la définition du point neutre, noté N, les deux forces gravitationnelles exercées sur le projectile en ce point, doivent être opposées (même direction, même valeur et sens contraire) Les trois points T, L et N doivent donc être alignés et N doit être situé entre T et L. 1pt

5. Voir schéma ex 20 p.215 1pt

6. Au point neutre N, on peut écrire : $F_{T/P} = F_{L/P}$ 1pt

soit $G\dfrac{M_T M_P}{TN^2} = G\dfrac{M_L M_P}{LN^2}$ avec LN = $d_{TL} - d$

La distance d = TN se détermine par : $\dfrac{M_T}{d^2} = \dfrac{M_L}{(d_{TL}-d)^2} \Rightarrow \dfrac{(d_{TL}-d)^2}{d^2} = \dfrac{M_L}{M_T} \Rightarrow \dfrac{(d_{TL}-d)}{d} = \sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}}$

$\Rightarrow \dfrac{d_{TL}}{d} - 1 = \sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}} \Rightarrow \dfrac{d_{TL}}{d} = \sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}} + 1 \Rightarrow \dfrac{d}{d_{TL}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}} + 1\right)}$ d'où finalement : $d = \dfrac{d_{TL}}{\left(\sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}} + 1\right)}$

d = $3,46.10^8$ m ≈ $3,5.10^5$ km 1,5 pts

Le pont neutre est donc situé à 350 000 km du centre de la Terre comme annoncé par Jules Verne. 0,5 pt

7. A la surface de la Lune, le poids $\vec{P}$ du projectile et la force d'attraction gravitationnelle $\overrightarrow{F_{L/P}}$ qu'exerce la Lune sur lui sont identiques : $\vec{P} = \overrightarrow{F_{L/P}}$

Soit $M_P g_L = G\dfrac{M_P M_L}{{R_L}^2} \Rightarrow g_L = G\dfrac{M_L}{{R_L}^2}$ A.N. : g_L = 1,62 N.kg^{-1} 1pt

A la surface de la Terre, le champ de pesanteur vaut en moyenne g = 9,80 N.kg^{-1}.

On constate que $\dfrac{g}{g_L} \approx 6$

Le champ de pesanteur lunaire est six fois plus faible que le champ de pesanteur terrestre. Le poids d'un objet est donc six fois plus faible sur la Lune que sur la Terre. En revanche, la masse de l'objet ne varie pas. 1pt