

~ TL spécialité Centres étrangers juin 2012 ~

L'usage d'une calculatrice est autorisé

3 heures

Deux annexes sont à rendre avec la copie

EXERCICE 1

5 points

On considère le nombre N écrit en base sept,

$$N = \overline{(abcd)}_{\text{sept}} = a \times 7^3 + b \times 7^2 + c \times 7 + d$$

où a, b, c et d sont des nombres entiers compris entre 0 et 6 (inclus).

1. Donner l'écriture en base dix des deux nombres A et B , avec

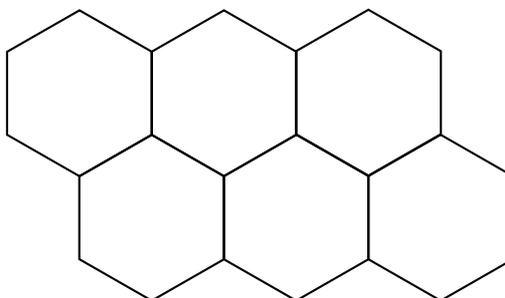
$$A = \overline{(1234)}_{\text{sept}} \quad \text{et} \quad B = \overline{(5223)}_{\text{sept}}$$

2. Les nombres A et B sont-ils divisibles par 6? On justifiera la réponse donnée.
3. a. Montrer que $7 \equiv 1 \pmod{6}$.
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $7^n \equiv 1 \pmod{6}$.
b. Montrer que $N \equiv a + b + c + d \pmod{6}$.
En déduire un critère de divisibilité par 6 du nombre $N = \overline{(abcd)}_{\text{sept}}$.
4. Appliquer ce critère pour retrouver les réponses à la question 2.

EXERCICE 2

5 points

On considère un carrelage horizontal dont les carreaux ont la forme d'un hexagone régulier. L'objectif de cet exercice est de dessiner l'un des carreaux du carrelage en perspective centrale.



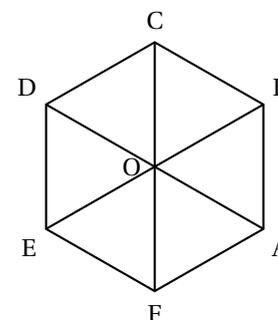
Vue de dessus du carrelage

On appelle ABCDEF cet hexagone régulier de centre O.

Notation : les points représentant O, A, B, C, D, E et F seront notés o, a, b, c, d, e et f sur la représentation en perspective centrale.

Sur la figure jointe en annexe 3, à rendre avec la copie, on a tracé la ligne d'horizon (h) et on a placé les points a, e et f représentant les points A, E et F.

On laissera apparents tous les traits de construction.



1. Construire P_1 et P_2 , points de fuite des droites (EF) et (AF).
2. a. Que peut-on dire des droites (EO) et (AF)? des droites (AO) et (EF)?
Aucune justification n'est attendue.

- b. Que peut-on en déduire concernant les droites (eo) et (af) ? (ao) et (cf) ?
 Construire le point o représentant le point O .
3. Terminer la construction de $abcdef$.

EXERCICE 3**5 points**

On classe les clients des hôtels en deux catégories, ceux qui séjournent à titre privé et ceux qui séjournent à titre professionnel. La chaîne d'hôtels « Nuit calme » souhaite évaluer sa part de marché sur le secteur des séjours à titre professionnel. Elle fait réaliser une enquête qui lui permet de disposer des renseignements suivants :

- Dans la région où elle est implantée, la chaîne assure 20 % de l'ensemble des nuitées, tous types de séjour compris.
- Dans cette région, on évalue les nuitées pour séjour à titre professionnel à 40 % de l'ensemble des nuitées.
- 57 % des nuitées de la chaîne « Nuit calme » correspondent à des séjours à titre professionnel.

On choisit une personne au hasard parmi toutes celles qui ont passé une nuit à l'hôtel dans la région pendant la période de l'enquête.

On considère les événements suivants :

- C : la personne est cliente de la chaîne « Nuit calme »,
- A : la personne séjourne dans la région à titre professionnel.

On note \bar{C} et \bar{A} les événements contraires des événements C et A .

1. Quelle est la probabilité de l'évènement C ?
2. Quelle est la probabilité de l'évènement A ?
3. Compléter les quatre rectangles de l'arbre donné en **annexe 1** avec les probabilités relatives aux branches. On ne demande pas les deux autres probabilités.
4. Traduire l'évènement $C \cap A$ par une phrase.
Calculer la probabilité de l'évènement $C \cap A$.
5. Quelle est la probabilité que la personne choisie passe la nuit dans un hôtel de la chaîne « Nuit calme » sachant qu'elle séjourne dans la région à titre professionnel ?
En déduire la part de marché de la chaîne « Nuit calme » sur le secteur des séjours à titre professionnel. On donnera le résultat à 1 % près.

EXERCICE 4**5 points**

On lâche à partir du sol un ballon atmosphérique.

Pour prédire la hauteur, exprimée en mètres, atteinte par le ballon lorsque s'est écoulé un temps t , exprimé en minutes, à partir de son lâcher, un physicien a proposé la fonction h définie par

$$h(t) = 1200(1 - e^{-0,1t}).$$

Lors d'un lâcher par temps calme du ballon, une mesure fournit, minute après minute, la hauteur de ce ballon.

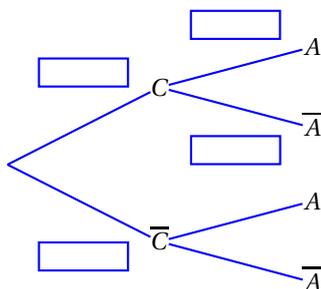
Les résultats sont les suivants :

temps écoulé en minutes	3	9	15	25	40
hauteur mesurée en mètres	302	703	896	1 082	1 143

1. On veut vérifier si la formule théorique est compatible avec les mesures effectuées.
On appelle :
 - *écart absolu* : la différence entre la valeur calculée avec la fonction h et la valeur mesurée.
 - *écart relatif* : le quotient de l'écart absolu par la valeur mesurée.

On considère que la fonction h , est acceptable si, pour chacune des cinq mesures effectuées, l'écart relatif est compris entre -5% et $+5\%$.

- a. Compléter le tableau de l'annexe 2 en arrondissant à l'unité les hauteurs et au dixième de pourcent les écarts relatifs.
 - b. La fonction h est-elle acceptable?
2. Étude de la fonction h sur l'intervalle $[3; 60]$.
- a. Montrer que la fonction h' dérivée de h vérifie $h'(t) = 120e^{-0,1t}$.
 - b. En déduire le sens de variation de h .
 - c. Établir le tableau de variation de h . On fera figurer les images de 3 et de 60 dans le tableau.
 - d. À l'aide du tableau de variation, indiquer si les équations suivantes ont une solution dans l'intervalle $[3; 60]$. On justifiera la réponse.
 - (1) $h(t) = 500$
 - (2) $h(t) = 1200$
 - e. Déterminer le temps nécessaire au ballon pour atteindre la hauteur de 1000 m, en considérant que cette hauteur est donnée par la fonction h . *On arrondira le résultat à la minute.*

Annexe 1 - à rendre avec la copie**Exercice 3 : Compléter uniquement les rectangles.****Annexe 2 - à rendre avec la copie****Exercice 4 ; tableau à compléter**

temps écoulé en minutes	3	9	15	25	40
hauteur mesurée en mètres	302	703	896	1 082	1 143
$h(t)$	311	712	932		
écart absolu	9	9		19	
écart relatif	3,0 %			1,8 %	

Annexe 3 - à rendre avec la copie

Exercice 2

(h)

