Corrigé du baccalauréat Terminale ES Polynésie 21 juin 2019

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ d'expression $f(x) = -1{,}5x^2 + x^2\ln(x)$.
La fonction dérivée de f est donnée pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ par :

a. $f'(x) = -x+1$ **b.** $\boxed{f'(x) = 2x\ln(x) - 2x}$
c. $f'(x) = -3x+2$ **d.** $f'(x) = -x\ln(x) - 0{,}5x$

$f(x) = -1{,}5x^2 + x^2\ln(x)$ donc
$f'(x) = -1{,}5\times 2x + \left(2x\times\ln(x) + x^2\times\dfrac{1}{x}\right) = -3x + 2x\ln(x) + x = 2x\ln(x) - 2x$

2. Entre 2006 et 2018, dans un restaurant universitaire, le prix d'un repas est passé de 2 euros à 3,50 euros en augmentant chaque année de x %. Parmi ces valeurs, la valeur la plus proche de x est :

a. 6,25 **b.** $\boxed{4{,}77}$ **c.** 14,58 **d.** 0,85

Il y a 12 ans entre 2006 et 2018. Le nombre x est tel que $2\times(1+x)^{12} = 3{,}5$; ce qui veut dire que $x = \left(\dfrac{3{,}5}{2}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0{,}0477$ qui correspond à 4,77 %.

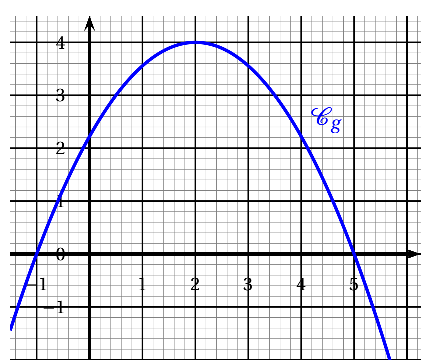
3. Un adolescent joue à un jeu dont les parties successives sont indépendantes.
À chaque partie, il a une chance sur 25 de sortir vainqueur.
Après 13 parties, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait gagné au moins une fois est :

a. 0,588 **b.** $\boxed{0{,}412}$ **c.** 0,025 **d.** 0,975

L'événement « il a gagné au moins une fois » est l'événement contraire de « il n'a jamais gagné » qui est de probabilité $\left(\dfrac{24}{25}\right)^{13}$.
La probabilité cherchée est donc $1 - \left(\dfrac{24}{25}\right)^{13} \approx 0{,}412$.

4. On considère une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est donnée ci-contre.
La fonction g admet une primitive sur $\mathbb{R}$ notée G.
La fonction G est :

a. convexe sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.
b. concave sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$.
c. $\boxed{\text{croissante sur l'intervalle } [2\,;\,5].}$
d. décroissante sur l'intervalle $[2\,;\,5]$



La fonction $g = G'$ est positive sur $[2\,;\,5]$, donc la fonction G est croissante sur $[2\,;\,5]$.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise vend des téléviseurs.

Partie A

Une étude a montré que ces téléviseurs peuvent rencontrer deux types de défauts : un défaut sur la dalle, un défaut sur le condensateur.
L'étude indique que :

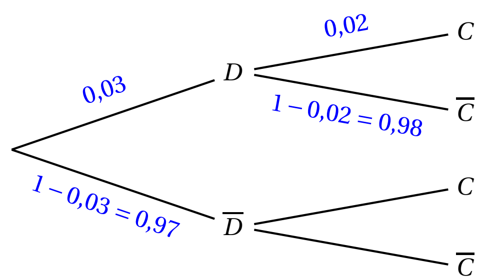
- 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur la dalle et parmi ceux-ci 2 % ont aussi un défaut sur le condensateur.
- 5 % des téléviseurs ont un défaut sur le condensateur.

On choisit au hasard un téléviseur et on considère les évènements suivants :

- D :« le téléviseur a un défaut sur la dalle » ;
- C :« le téléviseur a un défaut sur le condensateur ».

1. **a.** 3 % des téléviseurs présentent un défaut sur la dalle, donc $p(D) = 0{,}03$, et parmi ceux-ci 2 % ont aussi un défaut sur le condensateur, donc $p_D(C) = 0{,}02$.
   5 % des téléviseurs ont un défaut sur le condensateur, donc $p(C) = 0{,}05$.

   b. On complète dans l'arbre ci-dessous les pointillés par les probabilités associées :



   c. $p(D \cap C) = p(D) \times p_D(C) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$

   d. Le téléviseur choisi a un défaut sur le condensateur.
   La probabilité qu'il ait un défaut sur la dalle est $p_C(D) = \dfrac{p(D \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}0006}{0{,}05} = 0{,}012$

   e. La probabilité que le téléviseur choisi ait un défaut sur le condensateur mais pas de défaut sur la dalle est $p\left(\overline{D} \cap C\right)$.
   D'après la formule des probabilités totales, $p(C) = p\left(D \cap C\right) + p\left(\overline{D} \cap C\right)$; on sait que $p(C) = 0{,}05$ donc $0{,}05 = 0{,}0006 + p\left(\overline{D} \cap C\right)$ donc $p\left(\overline{D} \cap C\right) = 0{,}05 - 0{,}0006 = 0{,}0494$.

2. On note T la variable aléatoire qui, à chaque téléviseur prélevé, associe le temps exprimé en mois avant la première panne. On admet que T suit la loi normale d'espérance $\mu = 84$ et d'écart type $\sigma = 6$.

   a. La probabilité qu'un téléviseur tombe en panne pour la première fois après 72 mois d'utilisation est $p(T > 72) \approx 0{,}98$.

   b. La probabilité que la première panne arrive entre 6 années (soit 72 mois) et 8 années (soit 96 mois) d'utilisation est $p(72 \leqslant T \leqslant 96) \approx 0{,}95$.

   c. Le téléviseur n'a pas eu de panne après 6 années d'utilisation.
   La probabilité qu'il tombe en panne avant 8 années d'utilisation est
   $p_{T \geqslant 72}(T \leqslant 96) = \dfrac{p\left((T \geqslant 72) \cap (T \leqslant 96)\right)}{p(T \geqslant 72)} = \dfrac{p\,(72 \leqslant T \leqslant 96)}{p(T \geqslant 72)} \approx \dfrac{0{,}9545}{0{,}9772} \approx 0{,}98.$

Partie B

Afin de satisfaire davantage de clients, l'entreprise décide d'apporter des améliorations à son service d'assistance. Après quelques mois de mise en place du nouveau service, elle affirme que 90 % des clients sont maintenant satisfaits. Un service de contrôle indépendant veut vérifier cette affirmation. Pour cela il interroge au hasard 300 clients. Parmi eux, 265 affirment être satisfaits.
On va tester l'hypothèse « 90 % des clients sont satisfaits » sur un échantillon de taille 300.

$n = 300 \geqslant 30$, $p = 0{,}9$ donc $np = 270 \geqslant 5$ et $n\left(1-p\right) = 30 \geqslant 5$ donc on peut utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour vérifier ou infirmer cette hypothèse.

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p\left(1-p\right)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p\left(1-p\right)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}9 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}9\times 0{,}1}}{\sqrt{300}}\ ;\ 0{,}9 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}9\times 0{,}1}}{\sqrt{300}}\right]$$

$$\approx \left[0{,}866\ ;\ 0{,}934\right]$$

Dans l'échantillon choisi, la fréquence de clients satisfaits est $f = \dfrac{265}{300} \approx 0{,}88$.

$f \in I$ donc, au vu de cet échantillon, on ne peut pas remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.

Exercice 3 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Sur un site de vente en ligne, Antoine a commandé une machine à café à capsules.

1. Chaque capsule achetée à l'unité coûte 0,60 €.
   Une offre permet d'acquérir 150 capsules au prix de 60 €, ce qui fait $\dfrac{60}{150} = 0{,}40$ € à l'unité.
   La réduction est donc de 0,20 sur 0,60 soit un tiers donc 33,33 %.
2. Au 1^er^janvier 2017, on comptait 60 000 utilisateurs de cette machine à café.
   On estime que chaque mois, 10 % des propriétaires cessent de l'utiliser mais on compte 24 000 nouveaux utilisateurs.
   a. Soit (u_n) la suite modélisant le nombre d'utilisateurs de cette machine à café n mois après le 1^er^ janvier 2017. Au 1^er^ janvier 2017, on comptait 60 000 utilisateurs de cette machine à café donc $u_0 = 60000$.
   Retirer 10 %n c'est multiplier par 0,9. On passe du mois n au mois $n+1$ en multipliant par 0,9 puis en ajoutant 24 000.
   On peut donc dire que pour tout n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 24000$.
   b. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 240000$. On peut donc dire que $u_n = v_n + 240000$.
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 240\,000 = 0{,}9u_n + 24\,000 - 240\,000 = 0{,}9\left(v_n + 240\,000\right) - 216\,000$
     $= 0{,}9v_n + 216\,000 - 216\,000 = 0{,}9v_n$
   - $v_0 = u_0 - 240\,000 = 60\,000 - 240\,000 = -180\,000$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$ et de premier terme $v_0 = -180\,000$.
3. **a.** On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -180\,000 \times 0{,}9^n$.
   b. Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 240\,000 = 240\,000 - 180\,000 \times 0{,}9^n$.
4. Pour déterminer au bout de combien de mois le nombre d'utilisateurs de cette machine à café dépassera pour la première fois 230 000, on résout l'inéquation $u_n \geqslant 230\,000$:
   $u_n \geqslant 230\,000 \iff 240\,000 - 180\,000 \times 0{,}9^n \geqslant 230\,000 \iff \dfrac{240\,000 - 230\,000}{180\,000} \geqslant 0{,}9^n$
   $\iff \dfrac{5}{90} \geqslant 0{,}9^n \iff \ln\left(\dfrac{5}{90}\right) \geqslant \ln\left(0{,}9^n\right) \iff \ln\left(\dfrac{5}{90}\right) \geqslant n\ln(0{,}9) \iff \dfrac{\ln\left(\frac{5}{90}\right)}{\ln(0{,}9)} \leqslant n$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{90}\right)}{\ln(0,9)} \approx 27,4$ donc le nombre d'utilisateurs dépassera la première fois 230 000 le 28$^{\text{e}}$ mois.

5. L'entreprise qui fabrique cette machine à café prétend qu'elle touchera un certain mois plus de 250 000 utilisateurs.

$u_n = 240\,000 - 180\,000 \times 0,9^n$ donc, pour tout n, $u_n < 240\,000$.

L'affirmation de l'entreprise est donc fausse.

Exercice 3 **5 points**

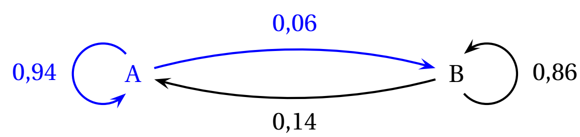
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Deux grossistes A et B se partagent la clientèle d'un liquide industriel. On suppose que le nombre total de clients reste fixe d'une année sur l'autre. En 2017, 45 % des clients se fournissaient chez le grossiste A et 55 % chez le grossiste B. D'une année sur l'autre, 6 % des clients du grossiste A deviennent clients du grossiste B tandis que le grossiste B conserve 86 % de ses clients.
Chaque année, on choisit au hasard un client ayant acheté le liquide.
Pour tout entier naturel n on note :

- a_n la probabilité qu'il soit client du grossiste A en $(2017 + n)$,
- b_n la probabilité qu'il soit client du grossiste B en $(2017 + n)$.

Pour tout entier naturel n, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant l'état probabiliste de l'année $(2017 + n)$. On rappelle que $a_n + b_n = 1$.
On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \end{pmatrix}$.

1. On représente cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B :



2. a. D'après le texte : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 0,94\,a_n + 0,14\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0,06\,a_n + 0,86\,b_n \end{array}\right.$

Ce qui s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$

Donc la matrice de transition de ce graphe est $T = \begin{pmatrix} 0,94 & 0,06 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$

b. L'année 2020 correspond à $n = 3$; on cherche donc P_3.

$P_3 = P_2 \times T = P_1 \times T \times T = P_0 \times T \times T \times T = P_0 \times T^3$

À la calculatrice, on trouve $P_3 = \begin{pmatrix} 0,572 & 0,428 \end{pmatrix}$ donc en 2020 il y aura 57,2 % pour le grossiste A et 42,8 % pour le grossiste B.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,14$.

a. On pose pour tout naturel n : $u_n = a_n - 0,7$. Donc $a_n = u_n + 0,7$.

- $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,7 = 0,8a_n + 0,14 - 0,7 = 0,8\left(u_n + 0,7\right) - 0,56 = 0,8u_n + 0,56 - 0,56 = 0,8u_n$
- $u_0 = a_0 - 0,7 = 0,45 - 0,7 = -0,25$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = -0,25$.

b. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $u_0 = -0,25$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = -0,25 \times 0,8^n$.

Comme $a_n = u_n + 0,7$, on déduit que, pour tout n, $a_n = -0,25 \times 0,8^n + 0,7$.

c. $0 < 0,8 < 1$ donc la suite (u_n) qui est géométrique de raison 0,8 a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,7$ et donc que le grossiste A peut espérer 70 % de part de marché à long terme.

d. Le grossiste A détiendra t-il plus de 65 % du marché quand n sera tel que $a_n > 0,65$; on résout cette inéquation :

$$a_n > 0,65 \iff -0,25\times 0,8^n + 0,7 > 0,65 \iff 0,7-0,65 > 0,25\times 0,8^n \iff \dfrac{0,05}{0,25} > 0,8^n$$

$$\iff 0,2 > 0,8^n \iff \ln(0,2) > \ln\left(0,8^n\right) \iff \ln(0,2) > n\ln(0,8) \iff \dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} < n$$

Or $\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} \approx 7,2$ donc c'est en $2017+8 = 2025$ que le grossiste A dépassera 65 % de part de marché.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~9]$ par $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x)$.
On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[1~;~9]$ on a $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln(x)$ donc
$f'(x) = 0,5\times 2x - 7 + 6\times\dfrac{1}{x} = x - 7 - \dfrac{6}{x} = \dfrac{x^2-7x+6}{x}$.

2. **a.** On va justifier les variations suivantes de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,9]$:

x	1	6	9
Variations de f	$\searrow$		$\nearrow$

Sur $[1~;~9]$, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 7x + 6$.
$\Delta = 7^2 - 4\times 1\times 6 = 49 - 24 = 25 = 5^2$ donc le trinôme $x^2 - 7x + 6$ admet deux racines :
$x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7-5}{2} = 1$ et $x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7+5}{2} = 6$.
On en déduit le signe du trinôme (positif à l'extérieur des racines) donc de $f'(x)$:

x	1		6		9
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Cela justifie les variations de f.

b. On complète le tableau de variations de f : $f(1) = 7,5$, $f(6) \approx 0,75$ et $f(9) \approx 4,7$

x	1	α	6	9
Variations de f	7,5 $\searrow$	5	$\searrow$ $\approx 0,75$ $\nearrow$	$\approx 4,7$

On en déduit que sur $[1~;~9]$, l'équation $f(x) = 5$ admet une solution unique α.

c. $\left.\begin{array}{l} f(2) \approx 6{,}2 > 5 \\ f(3) \approx 4{,}1 < 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2~;~3]$ $\left.\begin{array}{l} f(2{,}5) \approx 5{,}1 > 5 \\ f(2{,}6) \approx 4{,}9 < 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2{,}5~;~2{,}6]$

$\left.\begin{array}{l} f(2{,}55) \approx 5{,}018 > 5 \\ f(2{,}56) \approx 4{,}997 < 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in [2{,}55~;~2{,}56]$

d. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
X ← 1
Y ← 7,5
Tant que Y > 5
        X ← X + 0,01
        Y ← 0,5X^2 − 7X + 14 + 6 ∗ ln(X)
Fin Tantque
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable X contient la valeur 2,56, première valeur au centième pour laquelle $Y > 5$.

3. Le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est minimal quand la fonction f atteint son minimum c'est-à-dire pour $x = 6$; c'est donc pour la fabrication de 600 pneus que le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est minimal. Ce coût est, en euro, de $f(6) \times 100 \approx 75$.

Partie B

Cette même entreprise envisage la fabrication de semoirs (gros matériel agricole).
On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~100]$ par $g(x) = 2x - 1 + \mathrm{e}^{0{,}05x}$ modélise le coût de fabrication, exprimé en centaines d'euros, de x semoirs.

1. Sur l'intervalle $[0~;~100]$, la fonction g a pour primitive la fonction G définie par
$G(x) = x^2 - x + \dfrac{\mathrm{e}^{0{,}05x}}{0{,}05} = x^2 - x + 20\,\mathrm{e}^{0{,}05x}$.

2. La valeur moyenne m de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~100]$ est :
$m = \dfrac{1}{100-0}\displaystyle\int_0^{100} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{100}\left[G(100) - G(0)\right] = \dfrac{1}{100}\left[\left(9\,900 + 20\,\mathrm{e}^{5}\right) - (20)\right] = 9\,880 + 20\,\mathrm{e}^{5}$
$\approx 128{,}46$

3. Le coût moyen d'un semoir est donc, en euro, $128{,}46 \times 100 = 12\,846$.