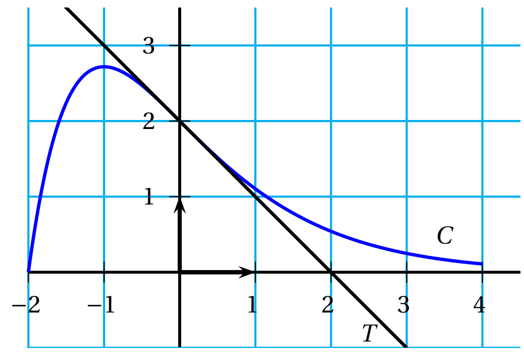
Corrigé du baccalauréat ES Polynésie 12 juin 2015

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. La fonction g est définie est dérivable pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$: $g'(x) = 6\text{e}^{3x} + \dfrac{1}{2x}$. C'est **la réponse c.**

2. La fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0, en effet la tangente coupe la courbe C au point d'abscisse O, de plus la courbe représentative se trouve au dessus pour $x \in [0~;~4]$, elle est donc convexe sur cet intervalle. C'est **la réponse d.**



3. La valeur ne peut être un nombre décimal, n est un entier naturel. En programmant cet algorithme, on trouve $n = 8$. C'est **la réponse c.**

4. X suit une loi uniforme sur $[0\,;5]$, l'espérance du loi uniforme sur $[a\,;b]$ vaut :
$\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+5}{2} = \dfrac{5}{2}$.
C'est **la réponse c.**

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A

1. L'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % vaut $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}~;~f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   a. Pour la partie champ traité, la fréquence de fruits abimés vaut $f = \dfrac{18}{100}$, l'intervalle vaut ici :
$$\left[\frac{18}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}}~;~\frac{18}{100} + \frac{1}{\sqrt{100}}\right].$$
On trouve :
$$I_T = [0,08~;~0,28].$$

   b. Pour la partie champ non traité, la fréquence de fruits abimés vaut $f = \dfrac{32}{100}$ l'intervalle vaut ici :
$$\left[\frac{32}{100} - \frac{1}{\sqrt{100}}~;~\frac{32}{100} + \frac{1}{\sqrt{100}}\right].$$
On trouve :
$$I_{\overline{T}} = [0,22~;~0,42].$$

2. La proportion, dans le cas du champ traité, la proportion de fruits abimés oscillera entre 8 % et 28 % avec une probabilité de 0,95.

La proportion, dans le cas du champ non traité, la proportion de fruits abimés oscillera entre 22 % et 42 % avec une probabilité de 0,95.

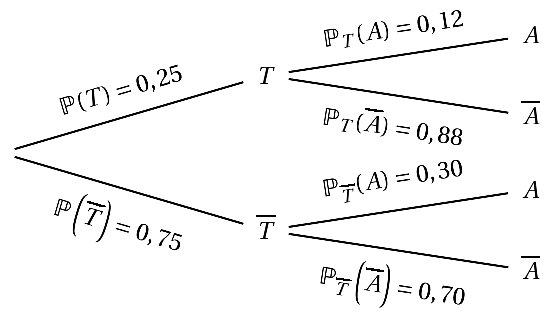
Les intervalles n'étant pas disjoints, on ne peut pas conclure à l'efficacité du traitement.

Partie B

1. Dans un premier temps :

Voici l'arbre de probabilité traduisant cette situation :

- $\mathbb{P}_T(A) = 0,12$
- $\mathbb{P}_T(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_T(A) = 0,88$
- $\mathbb{P}_{\overline{T}}(A) = 0,30$
- $\mathbb{P}_{\overline{T}}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{T}}(A) = 0,70$
- $\mathbb{P}(T) = \dfrac{1}{4} = 0,25$
- $\mathbb{P}(\overline{T}) = 1 - \mathbb{P}(T) = 0,75$



2. **a.** $\mathbb{P}(T \cap A) = \mathbb{P}_T(A) \times \mathbb{P}(T) = 0,12 \times 0,25 = 0,03$.

b. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap T) + \mathbb{P}\left(A \cap \overline{T}\right) \\ &= \mathbb{P}_T(A) \times \mathbb{P}(T) + \mathbb{P}_{\overline{T}}(A) \times \mathbb{P}\left(\overline{T}\right) \\ &= 0,12 \times 0,25 + 0,3 \times 0,75 \\ &= 0,03 + 0,225 \\ &= 0,255 \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{P}(A) = 0,255$.

3. On calcule ici : $\mathbb{P}_A(T) = \dfrac{\mathbb{P}(T \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0,03}{0,255} \approx 0,12$ et $0,12 \neq 0,25$. Cette affirmation est donc fausse.

4. Nous sommes dans le cas d'une expérience de Bernoulli (Les fruits sont abimés ou non).

Nous répétons cette expérience de manière indépendante avec remise (en effet chaque fruit ne dépend pas du précédent, bien que ...), nous sommes dans le cas d'un schéma de Bernoulli.

Comme X est une variable aléatoire comptant le nombre de fruits abimés nous pouvons assimiler cette loi à une loi binomiale : $X = \mathscr{B}(n, p)$, où $n = 5$ et $p = \mathbb{P}(A) = 0,255$.

Nous calculons ici : $\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \times 0,255^0 \times (1 - 0,255)^5 + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \times 0,255^1 \times (1 - 0,255)^4 \approx 0,622$.

Nous avons utilisé ici la calculatrice avec : binomcdf(5,0.255,1).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. **a.** $P = H \times C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \times 25 + 10 \times 20 + 14 \times 15 \\ 6 \times 25 + 6 \times 20 + 10 \times 15 \\ 12 \times 25 + 10 \times 20 + 18 \times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 610 \\ 420 \\ 770 \end{pmatrix}$

b. Le premier coefficient représente 610 €coût du modèle 1 après passage par les trois postes de travail : 8h multiplié par 25 €/h (coût horaire du poste 1) plus 10 h multiplié par 20 €/h (coût horaire du poste 2) plus 14 h multiplié par 15 €/h (coût horaire du poste 3).

De même pour les autres coefficients.

2. **a.** Ici, nous ne connaissons pas le coût unitaire par poste, a, b et c désignent les coûts horaires par postes de travail respectif, Poste 1, Poste 2 et Poste 3.

Pour le modèle 1 :

Le coût du modèle 1 après passage par les trois postes de travail : 8h multiplié par a €/h (coût horaire du poste 1) plus 10h multiplié par b €/h (coût horaire du poste 2) plus 14 h multiplié par c €/h (coût horaire du poste 3), et il vaut 500 €

De même pour les autres modèles.

On en déduit que : $\begin{pmatrix} 8\times a+10\times b+14\times c \\ 6\times a+6\times b+10\times c \\ 12\times a+10\times b+18\times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} \Leftrightarrow H\times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.

b. Pour déterminer les réels a, b et c, il suffit de calculer : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = H^{-1}\times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$.

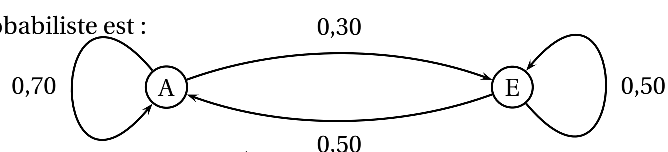
H est bien inversible : $H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Et : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ \frac{25}{2} \\ \frac{25}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 12,5 \\ 12,5 \end{pmatrix}$

Le coût horaire est de 25 €/h pour le poste 1, 12,5 €/h pour le poste 2 et de 12,5€/h pour le poste 3.

Partie B

1. **a.** Le graphe probabiliste est :



b. La matrice de transition vaut : $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$

2. **a.** Les spots sont illuminés de la manière suivante, les spots s'allument tous à 22 h 00, il y a donc 100 % des postes allumés au départ et donc 0 % qui sont éteints. L'état initial et donc 1 en terme de probabilité pour les postes allumés et 0 pour les postes éteints.

Ainsi : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

De plus : $P_{n+1} = P_n \times M$, on en déduit que :

$$P_n = P_0 \times M^n$$

b. Nous savons que :

$$P_3 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{157}{250} & \frac{93}{250} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$$

La probabilité que les spots soient éteints au bout de 30 secondes soit encore 3×10 est donnée par $b_3 = 0,372$.

3. Rechercher l'état stable c'est rechercher les coefficients a et b de : $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, tels que $a + b = 1$ avec : $P = P \times M$.

$P = P \times M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \times 0,7 + b \times 0,5 \\ a \times 0,3 + b \times 0,5 \end{pmatrix}$ Or deux matrices sont égales, si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on en déduit le système suivant :

$\begin{cases} 0,7a+0,5b=a \\ 0,3a+0,5b=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,3a+0,5b=0 \\ 0,3a-0,5b=0 \end{cases}$

Nous pouvons éliminer une des deux lignes, car la deuxième ligne est la première multipliée par (-1). Comme $a + b = 1$, on en déduit le nouveau système :

$\begin{cases} 0,3a-0,5b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3a-0,5b=0 \\ a=1-b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,3(1-b)-0,5b=0 \\ a=1-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,8\ b+0,3=0 \\ a=1-b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0,375 \\ a=1-0,375 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0,625 \\ b=0,375 \end{cases}.$

L'état stable vaut : $P = \begin{pmatrix} 0,625 & 0,375 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Toutes les semaines, la concentration baisse de 10 %, soit : $C_n \times \left(1 - \dfrac{1}{100}\right)$ mg.l^{-1}.

De plus, chaque semaine le distributeur automatique déverse : 10 mg.l^{-1}, soit $C_n \times 0,9 + 10$.

Au final, d'une semaine à l'autre, la concentration vaudra : $C_{n+1} = 0,9C_n + 10$.

2. **a.** On a :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= C_{n+1} - 100 \\ &= 0,9C_n + 10 - 100 \\ &= 0,9C_n - 90 \\ &= 0,9(C_n - 100) \\ &= 0,9Vn \end{aligned}$$

(V_n) est bien géométrique de raison $q = 0,9$.

b. Le terme général de (V_n) de premier terme $V_0 = C_0 - 100 = 160 - 100 = 60$, vaut :

$$V_n = V_0 \times q^n.$$

Ainsi :

$$V_n = 60 \times 0,9^n.$$

c. Comme $V_n = C_n - 100 \Leftrightarrow C_n + V_n + 100$.

Nous en déduisons que :

$$C_n = 0,9^n \times 60 + 100$$

3. **a.** $C_n = a_n \times b_n + c_n$ avec :

- $a_n = 0,9^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0^+$, car a_n est de la forme q^n avec $q \in]0\ ;\ 1[$.
- $b_n = 60$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 60$
- $c_n = 100$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 100$

$\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 100$
La concentration tendra donc vers 100 mg.l^{-1}.

b. Ici, on résout :

$$\begin{array}{rcll}
C_n < 140 & \Leftrightarrow & 0,9^n \times 60 + 100 < 140 & \\
 & \Leftrightarrow & 0,9^n \times 60 < 40 & \\
 & \Leftrightarrow & 0,9^n < \dfrac{2}{3} & \\
 & \Leftrightarrow & \ln(0,9^n) < \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) & \text{(en effet : } a \leqslant b \Leftrightarrow \ln a \leqslant \ln b) \\
 & \Leftrightarrow & n\ln(0,9)\, w \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) & \\
 & \Leftrightarrow & n > \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \div \ln(0,9) & \text{(en effet : } \ln 0,9 < 0) \\
 & \Leftrightarrow & n \geqslant 4 & \text{(en effet : } \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \div \ln(0,9) \approx 3,848)
\end{array}$$

Au bout de la quatrième semaine, la concentration sera inférieure ou égale à 140 mg.l^{-1}.

4. Non, la concentration sera inférieure à 140 mg.l^{-1} au bout de 4 semaines, la concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 160 mg.l^{-1} et elle doit se conformer à cela pendant une duree de 6 semaines au moins.

Partie B

Ici (C_n) est la suite définie par la relation de récurrence suivante : $C_{n+1} = C_n \times 0,9 + 12$, avec $C_0 = 160$.
En calculant les premiers termes, on obtient :

$C_1 = 156$, $C_2 = 152,4$, $C_3 = 149,16$, $C_4 = 146,244$, $C_5 = 143,6196$, $C_6 = 141,25764$ et $C_7 = 139,131876$.

Au bout de 7 semaines, la concentration sera à nouveau inférieure à 140 mg.l^{-1}, mais elle doit se conformer à cela pendant une duree de 6 semaines au moins. Nous sommes donc tout juste bon.

EXERCICE 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Par lecture graphique, le nombre de personne ayant choisi la formule privilège est : $P(2) = 5$ dizaines de milliers de passagers, soit encore : 50 000 passagers.

2. En 2015 :

   - $P(15) \approx 3,15$ dizaines de milliers de passagers,
   - $A(15) \approx 5,55$ dizaines de milliers de passagers,

   L'écart vaudra : $A(15) - P(15) \approx 5,55 - 3,15 = 2,4$ dizaines de milliers de passagers.

3. En 2006, il y aura autant de passagers ayant choisi la formule *Privilège* que la formule *Avantage*.

4. Le nombre de passagers pour la formule *Privilège*, de 2007 à 2015 correspond à : $N = \displaystyle\int_7^{15} P(x)\,\mathrm{d}x$.

   En unité d'aire de 1 carreau, on a : $24 \leqslant N \leqslant 32$ en dizaines de milliers de passagers.

   Le nombre total de passagers ayant choisi la formule *Privilège* durant la période entre 2007 et 2015 sera compris entre 240 000 et 320 000.

Partie B

1. **a.** $E'(x) = \dfrac{2}{x+1} + 0,6\mathrm{e}^{-0,2x}$,

   - Comme : $x \geqslant 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow \dfrac{2}{x+1} > 0$
   - De plus : $\mathrm{e}^{A} > 0$ pour tout A réel, on en déduit que : $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0 \Rightarrow 0,6\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$.

   Ainsi : $E'(x) > 0$ pour $x \in [0\,;\,16]$.

   b. On en déduit le tableau de signe de $E'(x)$ et les variations de E :

x	0		16
$E'(x)$		$+$	
E	-6	$\nearrow$	$-3\mathrm{e}^{-\frac{16}{5}} + 2\ln(17) - 3$

   $E(0) = A(0) - P(0) = 2\,\ln(0+1) - \left(3 + 3e^{-0,2\times 0}\right) = -6$

   $E(16) = A(16) - P(16) = 2\ln(16+1) - \left(3 + 3e^{-0,2\times 16}\right) = -3 \times \mathrm{e}^{-\frac{16}{5}} + 2\ln(17) - 3 \approx 2,544$

2. **a.** Nous savons que E est strictement croissante sur $[0; 16]$, et 0 est compris entre $E(0)$ et $E(16)$, E est continue en tant que fonction dérivable sur $[0; 16]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction E, $E(x) = 0$ admet une solution unique α. Une valeur arrondie au dixième vaut : $\alpha \approx 6,025 \approx 6,0$.

   b. Comme E est strictement croissante sur $[0; 16]$, et que $E(\alpha) = 0$, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		16
$E(x)$		$-$	0	$+$	

Conclusion :

- Pour $x < \alpha$, $E(x) < 0 \Leftrightarrow A(x) < P(x)$, sur $[0\,;\,\alpha]$, le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* sera inférieur au nombre de passagers ayant choisi la formule *Privilège*.
- Pour $x > \alpha$, $E(x) < 0 \Leftrightarrow A(x) > P(x)$, sur $[\alpha\,;\,+16]$, le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* sera supérieur au nombre de passagers ayant choisi la formule *Privilège*.
- Pour $x = \alpha$, $E(x) < 0 \Leftrightarrow A(x) = P(x)$, sur pour $x = \alpha$ le nombre de passagers ayant choisi la formule *Avantage* sera égal au nombre de passagers ayant choisi la formule *Privilège*.