

Durée : 3 heures

∞ Corrigé du baccalauréat ES/L - Métropole - La Réunion ∞  
21 juin 2019

Exercice 1

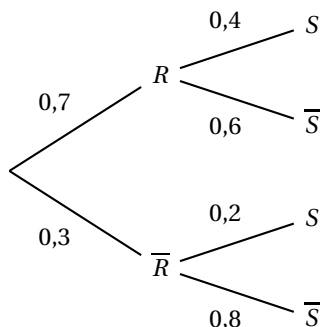
5 points

Commun à tous les candidats

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. Pour tout évènement  $E$ , on note  $\bar{E}$  l'évènement contraire de  $E$ .

On considère l'arbre pondéré suivant :



**Affirmation 1 :** La probabilité de  $\bar{R}$  sachant  $S$  est 0,06.

$$\text{On a } P_S(\bar{R}) = \frac{P(S \cap \bar{R})}{P(S)}.$$

- $P(S \cap \bar{R}) = P(\bar{R} \cap S) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$ .
- D'après la loi des probabilités totales :

$$P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S) = P(R) \times P_R(S) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,7 \times 0,4 + 0,3 \times 0,2 = 0,28 + 0,06 = 0,34.$$

$$\text{Donc } \frac{P(S \cap \bar{R})}{P(S)} = \frac{0,06}{0,34} = \frac{6}{34} = \frac{3}{17} \approx 0,18 : \text{l'affirmation est fausse.}$$

2. Soit  $k$  un réel tel que  $0 \leq k < 18$ . Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[k ; 18]$ . On suppose que l'espérance de  $X$  est égale à 12.

**Affirmation 2 :** La valeur de  $k$  est 9.

L'espérance de  $X$  sur  $[k ; 18]$  est égale à  $\frac{k+18}{2} = 12 \iff k+18 = 24 \iff k = 6$  : l'affirmation est fausse.

3. On considère l'équation suivante :

$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + \ln(2) = \ln(2x) + 5.$$

**Affirmation 3 :**  $\frac{1}{e}$  est l'unique solution de cette équation.

On cherche des solutions dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  pour que  $\ln\left(\frac{x^5}{e}\right)$  et  $\ln(2x)$  soient définis.

$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + \ln(2) = \ln(2x) + 5 \iff \ln\frac{x^2}{\frac{x^5}{e}} + \ln 2 - \ln(2x) = 5 \iff \ln\frac{e}{x^3} + \ln\frac{2}{2x} = 5 \iff$$

$$\ln\left(\frac{e}{x^3}\right) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 5 \iff \ln\left(\frac{e}{x^3} \times \frac{1}{x}\right) = 5 \iff \ln\left(\frac{e}{x^4}\right) = 5 \iff \ln\left(\frac{e}{x^4}\right) = \ln(e^5), \text{ d'où par}$$

croissance de la fonction logarithme :

$$\frac{e}{x^4} = e^5 \iff \frac{1}{x^4} = e^4 \iff \frac{1}{x} = e \iff x = \frac{1}{e} : \text{l'affirmation est vraie.}$$

4. Soit  $f$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $[0; 15]$ . On suppose que sa fonction dérivée, notée  $f'$ , est continue sur  $[0; 15]$ . Les variations de  $f'$  sont représentées dans le tableau ci-dessous.

$x$	0	5	15
$f'(x)$	30	-5	20

**Affirmation 4 :** La courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  admet une et une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.

D'après le tableau de variations de  $f'$ , cette dérivée s'annule sur l'intervalle  $[0; 5]$  et sur l'intervalle  $[5; 15]$ . Il existe donc  $a \in [0; 5]$  tel que  $f'(a) = 0$  et  $b \in ]5; 15]$  tel que  $f'(b) = 0$ . En ces deux points distincts le nombre dérivé est nul ce qui signifie que les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  sont horizontales : l'affirmation est fautive.

**Affirmation 5 :** La fonction  $f$  est convexe sur  $[5; 15]$ .

D'après le tableau de variations  $f$  est décroissante sur  $[5; b]$  et croissante sur  $[b; 15]$ ; comme  $f'$  est croissante sur  $[5; 15]$ , la fonction  $f$  est convexe sur cet intervalle : affirmation vraie.

## Exercice 2

5 points

### Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité ou candidats de L

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $u_n$  le nombre de pommiers par hectare l'année  $2018+n$ . On a ainsi  $u_0 = 300$ .

1. a. Soit  $u_n$  le nombre de pommier par hectare l'année  $n$ ; l'année suivante supprimer 4 % revient à multiplier  $u_n$  par  $1 - \frac{4}{100} = 1 - 0,04 = 0,96$ .

Il restera donc  $0,96 \times u_n$  et en plantant 22 pommiers il y aura donc l'année  $n+1$  :

$$u_{n+1} = 0,96u_n + 22.$$

- b. • En 2019,  $n = 1$ , donc  $u_1 = 0,96u_0 + 22 = 0,96 \times 300 + 22 = 288 + 22 = 310$ ;  
 • En 2020,  $n = 2$ , donc  $u_2 = 0,96u_1 + 22 = 0,96 \times 310 + 22 = 297,6 + 22 = 319,6$  soit 320 pommiers à l'unité près.

2.

a.

$N \leftarrow 0$   
 $U \leftarrow 300$   
 Tant que  $U < 400$   
      $N \leftarrow N + 1$   
      $U \leftarrow 0,96 \times N + 22$   
 Fin Tant que

b. Sur une calculatrice en entrant 300, puis  $*0,96 + 22$ , il faut appuyer 13 fois sur la touche Entrée pour obtenir plus de 400 :  $N = 13$ .

3. a. On a quel que soit le naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = u_{n+1} - 550 = 0,96u_n + 22 - 550$

$$v_{n+1} = 0,96u_n - 528 = 0,96 \left( u_n - \frac{528}{0,96} \right) = 0,96(u_n - 550) = 0,96v_n.$$

Quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = 0,96v_n$  : cette relation montre que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,96, de premier terme  $v_0 = u_0 - 550 = 300 - 550 = -250$ .

b. On sait qu'alors quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times 0,96^n$ , soit :

$$v_n = -250 \times 0,96^n.$$

Or  $v_n = u_n - 550$  donc  $u_n = v_n + 550 = -250 \times 0,96^n + 550$ .

Enfinement quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 550 - 250 \times 0,96^n$ .

c. 2025 correspond à  $n = 7$ .

$u_7 = 550 - 250 \times 0,96^7 \approx 362,1$ , donc 362 pommiers à l'unité près par hectare.

Or l'exploitation de Laurence a une superficie de 14 hectares.

Elle devrait donc avoir en 2025 :

$14 \times u_7 = 14(550 - 250 \times 0,96^7) \approx 5069,9$  soit 5 070 pommiers à l'unité près.

d. On a  $u_n > 400 \iff 550 - 250 \times 0,96^n > 400 \iff 150 > 250 \times 0,96^n \iff \frac{150}{250} > 0,96^n \iff 0,6 > 0,96^n \iff \ln 0,6 > n \ln 0,96$  (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où

$$n > \frac{\ln 0,6}{\ln 0,96} \quad (\text{car } \ln 0,96 < 0).$$

Or  $\frac{\ln 0,6}{\ln 0,96} \approx 12,5$ . On retrouve bien que la plus petite valeur solution de l'inéquation est 13.

## Exercice 2

5 points

### Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Pour se rendre à l'université, Julie peut emprunter deux itinéraires, l'un passant par les routes départementales, l'autre par une voie rapide. Elle teste les deux itinéraires.

Lorsque Julie emprunte la voie rapide un jour, la probabilité qu'elle emprunte le même itinéraire le lendemain est de 0,6.

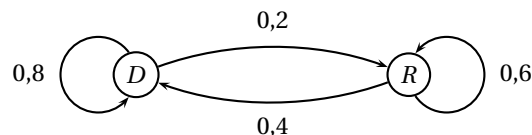
Lorsque Julie emprunte les routes départementales un jour, la probabilité qu'elle emprunte la voie rapide le lendemain est de 0,2.

Le premier jour, Julie emprunte la voie rapide.

On note :

- $D$  l'évènement « Julie emprunte les routes départementales » ;
- $R$  l'évènement « Julie emprunte la voie rapide ».

1. a.



- b. On a  $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ .
2. a.  $P_1 = (0 \ 1)$
- b.  $M^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64+0,08 & 0,16+0,12 \\ 0,32+0,24 & 0,08+0,36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$ .
- On a donc  $P_3 = P_1 \times M^2 = (0 \ 1) \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix} = (0,56 \ 0,44)$ .
- La probabilité que Julie emprunte les routes départementales le 3<sup>e</sup> jour est égale à 0,44.
3. a. Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $P_{n+1} = P_n \times M$  ou encore
- $$(d_{n+1} \ r_{n+1}) = (d_n \ r_n) \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = (0,8d_n + 0,4r_n \quad 0,2d_n + 0,6r_n).$$
- Conclusion :
- quel que soit  $n$  naturel non nul,  $\begin{cases} d_{n+1} = 0,8d_n + 0,4r_n \\ r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \end{cases}$ .
- b. L'algorithme 1 ne calcule ni  $d_3$  ni  $r_3$ .  
L'algorithme 2 calcule  $d_4$  et  $r_4$  (trois étapes).  
Seul l'algorithme 3 calcule  $d_3$  et  $r_3$ .
4. On a démontré que quel que soit  $n$  naturel non nul,  $r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n$ .  
Or on sait que  $d_n + r_n = 1 \iff d_n = 1 - r_n$ , soit en remplaçant dans la première égalité :  
 $r_{n+1} = 0,2(1 - r_n) + 0,6r_n = 0,2 - 0,2r_n + 0,6r_n = 0,2 + 0,4r_n$ .  
On a donc quel que soit le naturel  $n$  non nul :  $r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2$ .
5. On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = r_n - \frac{1}{3}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.
- a. Au rang  $n + 1$ , on a donc :
- $$v_{n+1} = r_{n+1} - \frac{1}{3} \text{ et en utilisant le résultat de la question précédente :}$$
- $$v_{n+1} = 0,4r_n + 0,2 - \frac{1}{3} = 0,4r_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = 0,4r_n + \frac{3-5}{15} = 0,4r_n - \frac{2}{15} = \frac{2}{5}r_n - \frac{2}{15} = \frac{2}{5} \left( r_n - \frac{1}{3} \right).$$
- Conclusion quel que soit le naturel  $n$  non nul :
- $$v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n, \text{ égalité qui montre que la suite } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{2}{5}, \text{ de}$$
- premier terme  $v_1 = r_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .
- b. On sait que quel que soit le naturel  $n \geq 1$ ,  $v_n = v_1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ , soit  $v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ .
- Or  $v_n = r_n - \frac{1}{3} \iff r_n = v_n + \frac{1}{3}$  donc  $r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ,
- ce qui donne bien  $r_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,4^{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0,4^n$ .
- c. Comme  $0 < \frac{2}{5} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{3}$ .

**Exercice 3****5 points****Commun à tous les candidats***Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.**Les résultats seront arrondis au centième.***Partie A**

1. La probabilité qu'il y ait pénurie d'eau est égale à  $P(D < 8) = P(D \leq 5,5) - P(8 \leq D \leq 15,5) \approx 0,5 - 0,39$  d'après la calculatrice. La probabilité qu'il y ait pénurie d'eau est environ 0,11.
2. Il n'y a pas de problème quand  $8 \leq D \leq 26$ . Or d'après la calculatrice  $P(8 \leq D \leq 15,5) \approx 0,85$ .
3. On sait que  $P(\mu - 2\sigma \leq D \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$ .  
Or ici  $\mu - 2\sigma = 3,5$  et  $\mu + 2\sigma = 27,5$ .  
Donc au centième près  $P(3,5 \leq D \leq 27,5) \approx 0,95$ .

**Partie B**

1. À chaque relevé la probabilité que ce soit l'équipe de Sébastien qui effectue celui-ci est égale à  $\frac{1}{4} = 0,25$  et les choix relevant du hasard, on peut dire que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,25$ .
2. On a  $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,25^4 \times (1 - 0,25)^4 \approx 0,1459$  soit environ 0,15.
3. On a  $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0,244 \approx 0,76$ .  
La probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien est environ 0,76.

**Partie C**

Si l'échantillon est de taille  $n$ , l'amplitude de l'intervalle de confiance est égale à  $\frac{2}{\sqrt{n}}$ .

Il faut donc résoudre  $\frac{2}{\sqrt{n}} < 0,1 \iff \frac{20}{\sqrt{n}} < 1 \iff 20 < \sqrt{n} \Rightarrow 400 < n$ .

Conclusion : il faut plus de 400 relevés pour obtenir une estimation de la proportion  $p$  de relevés de qualité « satisfaisante » avec une précision inférieure à 0,1.

**Exercice 4****5 points****Commun à tous les candidats**

1. On lit  $f(0) \approx 112$  et  $f(60) \approx 70$ .
2. Puisque A de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 7 est un point d'inflexion de  $\mathcal{C}_f$ , on sait que  $f''(7) = 0$ .
3. a. Voir l'annexe 2.  
b. La surface contient le rectangle de dimensions 70 et 60 soit une aire d'au moins 4 200 unités d'aire : l'estimation de l'ébéniste est inférieure à la réalité.

**Partie B**

1. La fonction  $f$  est dérivable car produit de sommes de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[0; 60]$ .

La dérivée de la constante étant nulle, il faut dériver  $u(x) \times v(x)$ , avec

$u(x) = 14x + 42$  et  $v(x) = e^{-\frac{x}{5}}$ , on obtient :

$u'(x) = 14$  et  $v'(x) = -\frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}$ . Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42) \times \left(-\frac{1}{5}\right) e^{-\frac{x}{5}} = e^{-\frac{x}{5}} \left(14 - \frac{14x + 42}{5}\right) = e^{-\frac{x}{5}} \left(\frac{70 - 14x - 42}{5}\right) \\ &= e^{-\frac{x}{5}} \left(\frac{28 - 14x}{5}\right). \end{aligned}$$

2. a. Comme  $5 > 0$  et que quel soit le réel  $x$ ,  $e^{-\frac{x}{5}} > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de la différence  $28 - 14x = 14(2 - x)$ .

On voit aisément que si  $0 \leq x < 2$ , alors  $2 - x > 0$  : la dérivée est positive sur  $[0; 2[$ ;

$$f'(2) = 0;$$

si  $x > 2$ , alors  $2 - x < 0$  : la dérivée est négative sur  $]2; 60]$ .

- b. On déduit des résultats précédents le tableau de variations de la fonction  $f$  :

$x$	0	2	60
$f'(x)$		0	
		+	-
$f(x)$	112	$\approx 117$	$\approx 70$

Avec  $f(0) = 70 + 42 = 112$ ;  $f(2) = 70 + 70e^{-0,4} \approx 116,922$  et  $f(60) = 70 + 882e^{-12} \approx 70,0054$ .

3. Le logiciel indique que  $f''(x) = 14e^{-\frac{1}{5}x} \times \frac{x-7}{25}$ .

Comme  $\frac{14}{25} > 0$  et que quel soit le réel  $x$ ,  $e^{-\frac{1}{5}x} > 0$ , le signe de  $f''(x)$  est celui de  $x - 7$ .

Donc  $f''(x) = 0 \iff x = 7$ , ce qui montre que la fonction a un point d'inflexion pour  $x = 7$ .

De plus  $f''(x) < 0 \iff x - 7 < 0 \iff x < 7$ , donc la fonction est concave sur  $[0; 7]$ ;

$f''(x) > 0 \iff x - 7 > 0 \iff x > 7$ , donc la fonction est convexe sur  $[7; 60]$ .

4. a.  $G$  produit de fonctions dérivables sur  $[7; 60]$  est dérivable et sur cet intervalle :

$$G'(x) = -70e^{-\frac{x}{5}} - \frac{1}{5} \times (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}} = -70e^{-\frac{x}{5}} + (14x + 112)e^{-\frac{x}{5}} = e^{-\frac{x}{5}}(-70 + 14x + 112) = e^{-\frac{x}{5}}(14x + 42) = g(x), \text{ ce qui démontre que } G \text{ est une primitive de } g \text{ sur } [0; 60].$$

- b. Comme pour tout  $x$  de  $[0; 70]$ ,  $f(x) = g(x) + 70$ , une primitive de  $f$  est la fonction  $G(x) + 70x = 70x + (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}$ .

- c. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^{60} f(x) dx &= \left[ 70x + (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}} \right]_0^{60} \\ &= \left( 70 \times 60 + (-70 \times 60 - 560)e^{-\frac{60}{5}} \right) - \left( 70 \times 0 + (-70 \times 0 - 560)e^{-\frac{0}{5}} \right) \\ &= 4200 - 4760e^{-12} - (-560) = 4760 - 4760e^{-12}. \end{aligned}$$

Comme  $4760e^{-12} \approx 0,03$ , on a donc  $\int_0^{60} f(x) dx \approx 4760$  à l'unité près.

### Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 2 en choisissant comme unité le cm.

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à  $5\,400 \text{ cm}^2$ . Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir  $10 \text{ m}^2$ .

Il y a 2 accoudoirs à vernir sur les 2 faces, ce qui fait 4 faces en tout. La surface à vernir est, en  $\text{cm}^2$ , d'environ  $4 \times 4760 + 5400 = 24440$  soit  $2,444 \text{ m}^2$ .

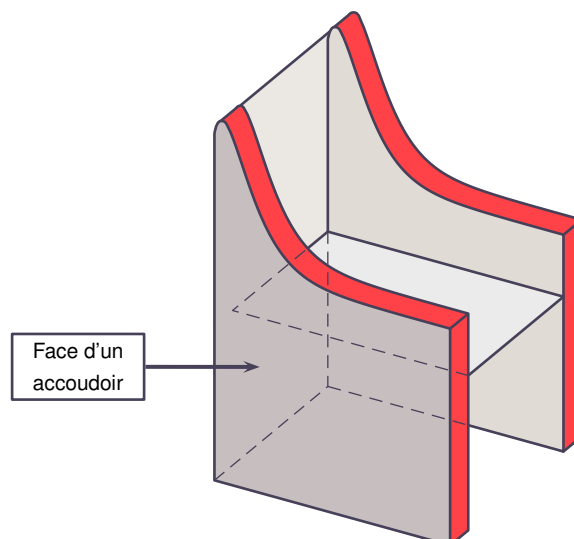
Il a un quart de pot qui couvre  $10 \text{ m}^2$  donc il peut vernir  $2,5 \text{ m}^2$ .

L'ébéniste aura donc assez de vernis.

## Annexes : à rendre avec la copie

## Exercice 4

## Annexe 1 : ébauche du fauteuil



## Annexe 2

