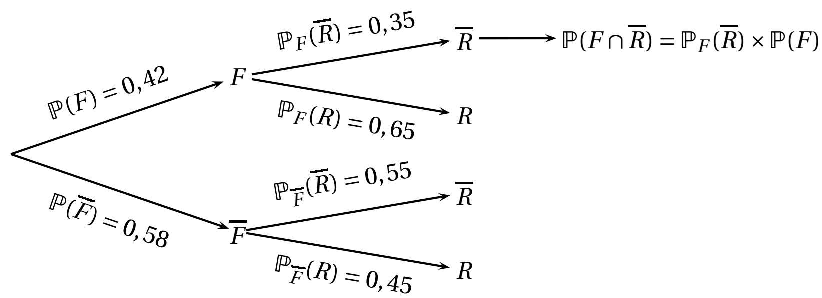
Corrigé du Baccalauréat ES Métropole–La Réunion 24 juin 2015

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats
Partie A

1.



2. $\mathbb{P}(F \cap \overline{R}) = \mathbb{P}_F(\overline{R}) \times \mathbb{P}(F) = 0,65 \times 0,42 = 0,273$

3. En utilisant la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R \cap F) + \mathbb{P}\left(R \cap \overline{F}\right)\\
&= \mathbb{P}_F(R) \times \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}_{\overline{F}}(R) \times \mathbb{P}\left(\overline{F}\right)\\
&= 0,65 \times 0,42 + 0,45 \times 0,58\\
&= 0,273 + 0,261\\
&= 0,534
\end{aligned}$$

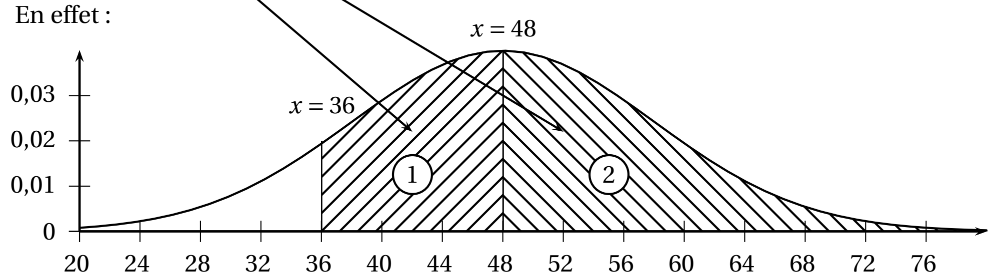
Partie B

Ici X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec $\mu = 48$ et $\sigma = 10$.

1. Nous calculons ici :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 36) &= \mathbb{P}(36 < X \leqslant 48) + \mathbb{P}(X > 48) && \text{(C'est une loi continue, et les deux évènements sont incompatibles)}\\
&= \mathbb{P}(36 \leqslant X \leqslant 48) + \mathbb{P}(X \geqslant 48) && \text{(C'est une loi continue)}\\
&\approx 0,3849 + 0,5 && \text{(le 1 est obtenu en utilisant la calculatrice, le 2 vaut 0,5}\\
&\approx 0,885 && \text{C'est la moitié de l'aire totale sous la courbe)}
\end{aligned}$$

En effet :



2. Nous calculons ici :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{X>3\times 12}(X < 5 \times 12) &= \mathbb{P}_{X \geqslant 36}(X \leqslant 60) && \text{(C'est une loi continue)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(36 \leqslant X \leqslant 60)}{\mathbb{P}(X \geqslant 36)}\\
&\approx \frac{0,76986}{0,884930}\\
&\approx 0,870
\end{aligned}$$

partie C

1. Nous savons que :

   - $p = 0,3$ la proportion.
   - $n = 1\,500$ et $n \geqslant 30$
   - $n \times p = 450$ et $450 \geqslant 5$
   - $n \times (1-p) = 1\,050$ et $1\,050 \geqslant 5$.

   L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence vaut :

$$I = \left[p - 1,96 \times \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96 \times \frac{\sqrt{p\,(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

   En effectuant les calculs, nous obtenons :

$$I = [0,276\ ;\ 0,323].$$

2. La fréquence observée pour l'échantillon vaut : $f = \dfrac{430}{1\,500} \approx 0,287$. Ici $f \in I$, $p = 0,3$ est donc acceptable.

Exercice 2 **5 points**
candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_3 = 2\,000 \times 1,008^2 \approx 2\,032,13$. Le coût après 30 m de forage est de 2 032,13 €.
   Le coût total est donc à peu près égal à :
   $2\,000 + 2\,016 + 2\,032,13$ soit au centime près 6 048,13 €.

2. **a.** Nous pouvons calculer :
$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2\,000 \times 1,008^{n+1-1} \\ & = & 2\,000 \times 1,008^{n-1+1} \\ & = & 2\,000 \times 1,008^{n-1} \times 1,008 \\ & = & u_n \times 1,008 \end{array}$$
   (u_n) est géométrique de raison : $q = 1,008$.

   b. $u_{n+1} = 1,008 \times u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{0,8}{100}\right) \times u_n$.

   Pour passer de n à $n+1$ le coefficient multiplicateur vaut : $\left(1 + \dfrac{0,8}{100}\right)$.
   Le pourcentage d'augmentation permettant de passer de n à $n+1$ vaut donc : $t = 0,8$ %.

3. **a.**

valeurs de i		2	3	4	5
Valeur de u	2 000	2 016	2 032,128	2 048,38	2 064,77
Valeur de S	2 000	4 016	6 048,128	≈8 096,51	≈10 161,29

   b. La sortie donne : ≈ 10 161,29. C'est le coût de forage à 50 mètres de profondeur.

4. **a.** On recherche le plus grand entier n pour lequel :

$$\begin{aligned}
S_n &\leqslant 125\,000\\
-250\,000+250\,000\times 1,08^n &\leqslant 125\,000\\
250\,000\times 1,008^n &\leqslant 375\,000\\
1,008^n &\leqslant \frac{375}{250}\\
\ln\left(1,008^n\right) &\leqslant \ln\left(\frac{375}{250}\right)\\
n\ln 1,008 &\leqslant \ln\left(\frac{375}{250}\right)\\
n &\leqslant \ln\left(\frac{375}{250}\right)\div\ln(1,008)\\
n &\leqslant 50,885
\end{aligned}$$

Le coût est supérieur à 125 000 pour n plus grand que 50.

La profondeur maximale est donc égale à 500 mètres.

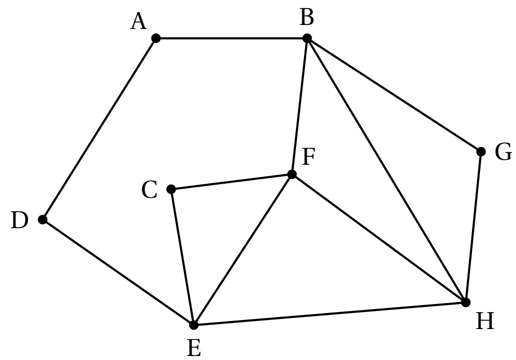
b. Voici l'algorithme modifié :

Variables :
n : dans $\mathbb{N}$
u, S : dans $\mathbb{R}$
Initialisation :
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000
n prend la valeur 1
Traitement :
tant que $S \leqslant 125\,000$ **faire**
  u prend la valeur $u * 1,008$
  S prend la valeur $S + u$
  n prend la valeur $n + 1$
fin tant que
Sortie :
Afficher $(n-1)\times 10$

Exercice 2 **5 points**

candidats ayant suivi l'enseignement de spécialitée

Partie A



1. **a.** Ce graphe Γ possède 8 sommets et c'est un graphe connexe, la chaîne A-B-G-H-F-C-E-D passe par tous les sommets, deux sommets quelconques seront toujours reliés par une chaîne.

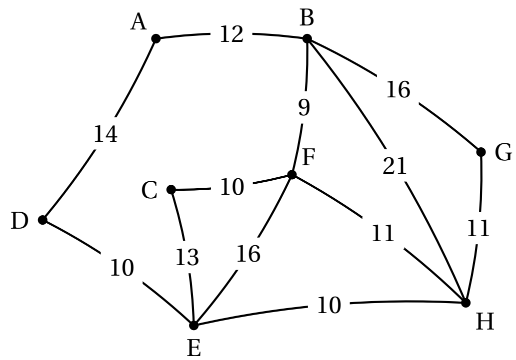
b. Tableau des sommets degrés

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	2	4	2	2	4	4	2	4

Le graphe a tous ses sommets de degré pair, étant connexe, il admet un cycle Eulérien d'après le théorème d'Euler, donc à fortiori une chaîne eulérienne.

2. Le nombre de chemin de longueur 3 reliant E à B est donné par $M_{25}^{(3)} = 5$, il y 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B



1. **a.** Nous avons déjà répondu à la question dans la partie A 1. b.

Voici un exemple de cycle : A-B-F-C-E-F-H-B-G-H-E-D-A .(nous avons utilisé ici l'algorithme d'Euler).

b. Nous cherchons ici tous les chemins de longueurs 3 reliant le refuge E au refuge B. Il y en a 5 (d'après la question 2. b. de la partie A).

Voici les chemins possibles : E-C-F-B E-H-F-B E-D-A-B E-H-G-B E-F-H-B.

2. Pour déterminer la distance la plus courte entre A et H, nous utiliserons l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	select
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
|	12 (A)	∞	14 (A)	∞	∞	∞	∞	B(12)
|	|	∞	14 (A)	∞	21 (B)	28 (B)	33 (B)	D(14)
|	|	∞	|	24 (D)	21 (B)	28 (B)	33 (B)	F(21)
|	|	31 (F)	|	24 (D)	|	28 (B)	32 (F)	E(24)
|	|	31 (F)	|	|	|	28 (B)	32 (F)	G(28)
|	|	31 (F)	|	|	|	|	32 (F)	C(31)
|	|	|	|	|	|	|	32 (F)	H(32)

La distance la plus courte vaut : 32

La chaîne qui la réalise vaut : A-B-F-H.

L'itinéraire le plus court reliant A à H fait donc 32 km et passe par les sommets suivants : A-B-F-H.

EXERCICE 3 **6 points**

commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** $f'(-3) = 0$, en effet au point d'abscisse -3 la tangente à la courbe est horizontale.

   b. $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.

2. Nous savons que : $f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-x}$.

   a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = 0 + 1 \times \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \times (x+b)$.

   b. Comme :

   - $f'(-3) = 0 \Rightarrow 1 \times \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-0} \times (0+b) = -3 \Rightarrow 1 - b = -3$.
   - $f(0) = 2 \Rightarrow a + (0+b) \times \mathrm{e}^{-0} = 2 \Rightarrow a + b = 2$.

   c. De la question précédente, nous déduisons le système suivant et sa résolution :

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2-b \\ b=4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

   Conclusion : $f(x) = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \times (x+4) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(1-(x+4)) \\ &= \mathrm{e}^{-x}(-x-3) \end{aligned}$$

   Comme : $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ ne dépendra que de : $-x-3$.

   Nous en déduisons le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f :

x	-4		-3		3
$-x-3$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			$-2+\mathrm{e}^3$		
	-2	$\nearrow$		$\searrow$	$-2+7\mathrm{e}^{-3}$

   Avec les valeurs suivantes :

   - $f(-4) = -2 + (-4+4)\mathrm{e}^4 = -2$
   - $f(-3) = -2 + (-3+4)\mathrm{e}^3 = -2 + \mathrm{e}^3 \approx 18,09$
   - $f(3) = -2 + (3+4)\mathrm{e}^{-3} \approx -1,651$

2. - sur [-3 ; 3], f est strictement décroissante.
   - f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur [-3 ; 3].

- 0 est compris entre $f(-3)$ et $f(3)$. Nous les avons calculé ci-dessus.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte monotonie de la fonction f sur [-3 ; 3], $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans cet intervalle.
Avec la calculatrice, nous trouvons : $\alpha \approx 0,895 \approx 0,90$.

3. **a.** Sur l'intervalle [-3 ; 0], la fonction admet un minimum atteint pour $x = 0$ et qui vaut : $f(0) = 2$.

On en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [-3; 0]$.

Ainsi l'aire comprise entre les axes d'équations $x = -3$, $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f vaut :

$$\mathscr{A} = \int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b. Une primitive de f vaut F, d'après la copie d'écran donnée dans le sujet. En effet :

$$F'(x) = x \times \mathrm{e}^{-x} + 4 \times \mathrm{e}^{-x} - 2 = (x+4) \times \mathrm{e}^{-x} - 2 = -2 + (x+4)\mathrm{e}^{-x}.$$

Calculons ensuite :

- $F(-3) = -2 \times (-3) + (+3-5)\mathrm{e}^{+3} = -2\mathrm{e}^3 + 6$
- $F(0) = -2 \times 0 + (-0-5)\mathrm{e}^{-0} = -5$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{A} & = & \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\
 & = & [F(x)]_{-3}^{0} \\
 & = & F(0) - F(-3) \\
 & = & -5 - \left(-2\mathrm{e}^3 + 6\right) \\
 & = & 2\mathrm{e}^3 - 11 \\
 & \approx & 29,17 \text{ U.A.}
\end{array}$$

EXERCICE 4 **3 points**
Commun à tous les candidats

Cette fonction est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$

- $f'(x) = 3 - 3\ln x - 3x \times \dfrac{1}{x} = -3\ln x$.
- $f''(x) = -\dfrac{3}{x}$.

Sur $\mathbb{R}_+^\star$, $f''(x) < 0$, f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Nous en déduisons que f est concave sur $\mathbb{R}_+^\star$.
Toutes ses tangentes sont donc au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, plus particulièrement la tangente T au point d'abscisse 1.