∽ Corrigé du baccalauréat ES Maths juin 2013 Métropole ∾

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : généralités

1. D'après les données de l'énoncé, on a :

$p_A(D)$ est la probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure (évènement D) sachant qu'il est produit par l'unité A (évènement A), avec $\boxed{p_A(D) = 0{,}014}$.

$p_B(D)$ est la probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure (évènement D) sachant qu'il est produit par l'unité B (évènement B), avec $\boxed{p_B(D) = 0{,}024}$.

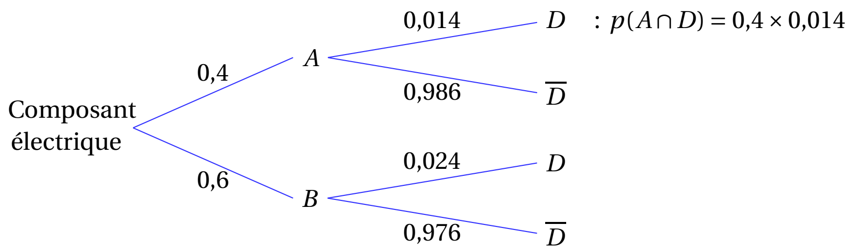
2. Le nombre total de composants électriques fabriqués par l'usine est $900 + 600 = 1\,500$ par jour. On en déduit

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{600}{1\,500} = 0{,}4$$
$$\boxed{p(A) = 40\,\%}$$

et

$$p(B) = \frac{900}{1\,500} = 0{,}6$$
$$\boxed{p(B) = 60\,\%}$$

Arbre de probabilité traduisant la situation de l'énoncé.



3. **a.** De la lecture de l'arbre de probabilité, on en déduit

$$p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0{,}4 \times 0{,}014 = 0{,}0056$$
$$\boxed{p(A \cap D) = 0{,}56\,\%}$$
$$p(B \cap D) = p(B) \times p_B(D) = 0{,}6 \times 0{,}024 = \%0{,}0144$$
$$\boxed{p(B \cap D) = 1{,}44\,\%}$$

b. D'après la formule des probabilités totales, on en déduit

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A) \times p_A(D) + p(B) \times p_B(D) \\ &= p(A \cap D) + p(B \cap D) \\ &= 0{,}0056 + 0{,}0144 = 0{,}02 \end{aligned}$$
$$\boxed{p(D) = 2\,\%}$$

4. On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure, la probabilité que ce composant provienne de l'unité A est $p_D(A)$.

$$p_D(A) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{0{,}0056}{0{,}02} = 0{,}28$$
$$\boxed{p_D(A) = 28\,\%}$$

Partie B : contrôle de qualité

La variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale $\mathcal{N}(200{,}5\ ;\ 3{,}5^2)$.

1. La probabilité p_1 de l'évènement « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms » est

$$p_1 = P(R \geqslant 211) = 1 - P(R \leqslant 211) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$$
$$\boxed{p_1 \approx 0{,}13\,\%}$$

2. La probabilité p_2 de l'évènement « La résistance du composant est comprise dans l'intervalle $[195\ ;\ 205]$ ohms » est

$$p_2 = P(195 \leqslant R \leqslant 205) = P(R \leqslant 205) - P(R \leqslant 195) = 0{,}9007 - 0{,}0580 = 0{,}8427$$
$$\boxed{p_2 \approx 84{,}27\,\%}$$

3. On effectue le prélèvement de trois composants dans la production de manière indépendante. La production journalière étant de 1 500 composants, ce prélèvement de 3 composants peut être assimilé à un tirage avec remise.
Alors la variable aléatoire X, qui associe à ce prélèvement le nombre de composants acceptés, suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3\ ;\ 0{,}84)$.
La probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés est

$$p = P(X = 2) = \binom{3}{2} 0{,}84^2 (1 - 0{,}84)^{3-2} = 3 \times 0{,}84^2 \times 0{,}16 = 0{,}338688$$
$$\boxed{p \approx 33{,}87\,\%}$$

Remarque : tous les résultats de cet exercice sont exacts et aucun arrondi n'est effectué.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Question 1

Au 1er septembre 2013, le capital de l'étudiant est le premier terme de la suite (c_n), soit $c_0 = 2500$.
Au 1er octobre 2013, le capital de l'étudiant est c_1, et au 1er mars 2014, le capital de l'étudiant est c_6.
Si l'étudiant est à découvert au début du mois de mars 2014, cela signifie que $c_6 < 0$. La suite (c_n) étant définie par récurrence, il faut calculer tous les termes jusqu'à c_6.

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= 1{,}002c_n - 425\\
c_1 &= 1{,}002c_0 - 425 = 1{,}002 \times 2500 - 425 = 2080\\
c_2 &= 1{,}002c_1 - 425 = 1{,}002 \times 2080 - 425 \approx 1659\\
c_3 &= 1{,}002c_2 - 425 \approx 1237\\
c_4 &= 1{,}002c_3 - 425 \approx 815\\
c_5 &= 1{,}002c_4 - 425 \approx 392\\
&\boxed{c_6 = 1{,}002c_5 - 425 \approx -33}
\end{aligned}$$

Au 1er mars 2014, le solde du compte de l'étudiant est de -33 € : le compte est à découvert.
$\boxed{\text{La proposition est VRAIE.}}$

Question 2

Soit f la fonction définie sur $I =]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 - \ln x$.

Alors f est dérivable sur I et

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{x^2}}$$

On en déduit que $f''(x) > 0$ sur I, donc f est convexe sur I.

$\boxed{\text{La proposition est VRAIE.}}$

Question 3

Soit F la fonction définie sur $I =]0~;~+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - 2x + 5$. Soit f la fonction définie sur $I =]0~;~+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x$.

Le logiciel de calcul formel donne

$$F'(x) = 2\ln x + \frac{2x}{x}$$
$$F'(x) = \ln x^2$$

or $\ln x^2 = 2\ln x$, donc

$$F'(x) = 2\ln x$$
$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

Donc F est une primitive de f sur I.

$\boxed{\text{La proposition est VRAIE.}}$

Question 4

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}6$, alors

$$P(-0{,}6 \leqslant X \leqslant 0{,}6) = P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$$

68 % des issues d'une variable aléatoire X suivant une loi de probabilité normale $\mathscr{B}(\mu~;~\sigma^2)$ sont dans l'intervalle $[\mu - \sigma~;~\mu + \sigma]$.

$\boxed{\text{La proposition est VRAIE.}}$

C'est un résultat utile à connaître par cœur. On peut aussi retrouver ce résultat par le calcul avec une calculatrice par

$$\begin{aligned} P(-0{,}6 \leqslant X \leqslant 0{,}6) &= P(X \leqslant 0{,}6) - P(X \leqslant -0{,}6) \\ &\approx 0{,}84 - 0{,}16 \\ &\approx 0{,}68 \end{aligned}$$

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude graphique]

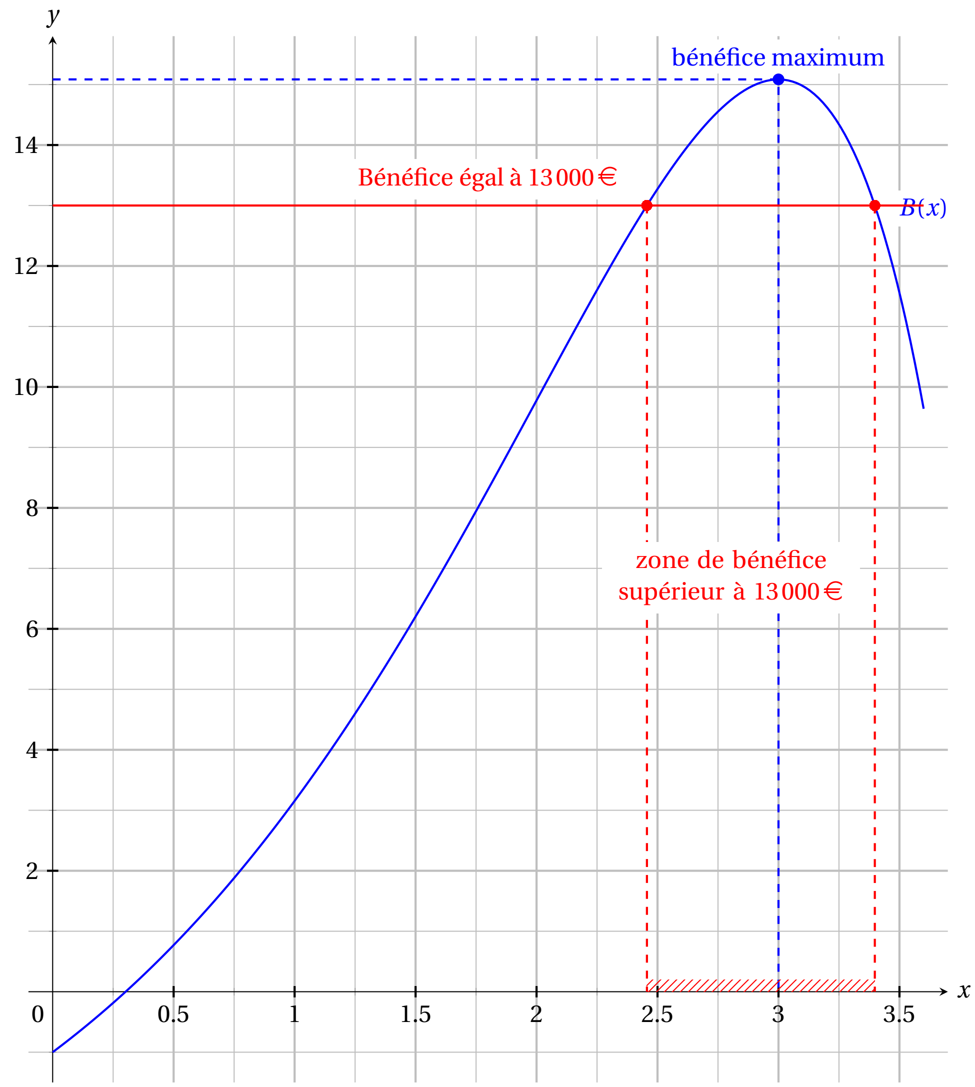
1. D'après le graphique, on observe que $B(x) > 13$ pour $x \in [2{,}5~;~3{,}4]$. Donc pour obtenir un bénéfice supérieur à 13 000 €, l'entreprise doit fabriquer entre 2 500 et 3 400 poulies par semaine, à cent poulies près.
   $\boxed{\text{Le nombre de poulies doit varier dans l'intervalle } [2500~;~3400]}$.
   Voir les traits de construction sur le graphique.

2. D'après le graphique, la valeur maximum de $B(x)$ est 15,1. Cette valeur est atteinte pour $x = 3$.

Le $\boxed{\text{bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise est 15 100 €}}$ sur l'intervalle [0 ; 3 600].

Ce bénéfice maximum est atteint pour $\boxed{N = 3000 \text{ poulies fabriquées}}$.

Voir les traits de construction sur le graphique.



Annexe 2 à rendre avec la copie

Partie B : étude théorique

1. Le bénéfice hebdomadaire exprimé en milliers d'euros est représenté par la fonction B définie par $B(x) = -5 + (4 - x)\,\mathrm{e}^x$ sur l'intervalle $I = [0 ; 3{,}6]$.

a. Calcul de la fonction dérivée B'.

On peut noter que B est du type $k+uv$, avec $k=-5$, $u(x)=4-x$, et $v(x)=\mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned}
B(x) &= -5+(4-x)\,\mathrm{e}^x\\
B(x) &= k+uv\\
B'(x) &= 0+(u'v+uv')\\
B'(x) &= 0+[(-1)\,\mathrm{e}^x+(4-x)\,\mathrm{e}^x]\\
B'(x) &= (-1+4-x)\,\mathrm{e}^x\\
&\boxed{B'(x)=(3-x)\,\mathrm{e}^x}
\end{aligned}$$

b. Étude du signe de B' sur I.
$B'(x)=(3-x)\,\mathrm{e}^x$
e^x est positif quel que soit le réel x, donc B' est du signe de $(3-x)$.
$(3-x)>0$ pour $x<3$.
Donc $B'(x)>0$ pour $x\in[0\,;\,3[$, $B'(x)=0$ pour $x=3$, et $B'(x)<0$ pour $x\in]3\,;\,3{,}6]$.

c. Tableau de variation de la fonction B.

x	0		3		3,6
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	−1	↗	15,1	↘	0,6

$B(0)=-5+(4-0)\,\mathrm{e}^0$ $\quad$ $B(3)=-5+(4-3)\,\mathrm{e}^3$ $\quad$ $B(3{,}6)=-5+(4-3{,}6)\,\mathrm{e}^{3{,}6}$

$B(0)=-5+4$ $\quad$ $\boxed{B(3)=-5+\mathrm{e}^3}$ $\quad$ $\boxed{B(3{,}6)=-5+0{,}4\mathrm{e}^{3{,}6}}$

$\boxed{B(0)=-1}$ $\quad$ $B(3)\approx 15{,}1$ $\quad$ $B(3{,}6)\approx 9{,}6$

2. a. La fonction B est continue et strictement croissante sur $[0;3]$, avec $B([0;3])=[-1;15{,}1]$ et $13\in[-1;15{,}1]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution $x_1\in[0;3]$ tel que $B(x_1)=13$.
De la même façon, la fonction B est continue et strictement décroissante sur $[3;3{,}6]$, avec $B([3\,;\,3{,}6])=[9{,}6\,;\,15{,}1]$ et $13\in[9{,}6\,;\,15{,}1]$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution $x_2\in[3\,;\,3{,}6]$ tel que $B(x_2)=13$.

b. On peut déterminer un encadrement de x_1 et x_2 à l'aide de la fonction TABLE de la calculatrice.

Avec un pas de 0,1 :	$2{,}4<x_1<2{,}5$	$3{,}3<x_2<3{,}4$.
Avec un pas de 0,01 :	$2{,}45<x_1<2{,}46$	$3{,}39<x_2<3{,}40$.
Avec un pas de 0,001 :	$2{,}455<x_1<2{,}456$	$3{,}398<x_2<3{,}399$.

Les valeurs approchées à 0,01 près sont $\boxed{x_1=2{,}46}$ et $\boxed{x_2=3{,}40}$.

Remarque : le pas à 0,001 est nécessaire afin de pouvoir déterminer laquelle des bornes inférieures ou supérieures les racines sont le plus proche à 0,01 près.

Méthode plus rapide : on peut utiliser la fonction SOLVE de la calculatrice pour obtenir directement les racines d'une équation.
Entrer l'équation $-5+(4-x)\,\mathrm{e}^x=13$ à l'invite du solveur d'équation.
Entrer l'intervalle auquel appartiennent les racines : 0 et 3,6.
Entrer une valeur approchée de la première racine : 2,4.
La calculatrice affiche alors 2,45598667826.

Entrer une valeur approchée de la seconde racine : 3,4.
La calculatrice affiche alors 3,3981971698.

Exercice 4 **5points**

Candidats de ES non spécialistes et candidats de L

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = -0{,}003\,2x^3 + 0{,}06x^2 + 5$.

On modélise la dépense, exprimée en milliards d'euros, des ménages français en programmes audiovisuels au cours de l'année $1995 + n$ par $f(n)$.

1. On a

$$f(5) = -0{,}003\,2 \times 5^3 + 0{,}06 \times 5^2 + 5 = -0{,}003\,2 \times 125 + 0{,}06 \times 25 + 5$$

$$\boxed{f(5) = 6{,}1}$$

La dépense des ménages français en programmes audiovisuels en 2000 est de 6,1 milliards d'euros.

2. Le pourcentage p de l'erreur commise en remplaçant la donnée D_5 par la valeur modélisée $f(5)$ est

$$p = \frac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}} = \frac{6{,}3 - 6{,}1}{6{,}3} = \frac{0{,}2}{6{,}3}$$

$$\boxed{p = 3{,}2\,\% \quad \text{à } 0{,}1\,\% \text{ près.}}$$

Le taux d'erreur est inférieur à 5 %, la modélisation par f est acceptable.

3. L'estimation de la dépense totale en 2013 en utilisant la modélisation par f est donnée par $f(18)$.

$$f(18) = -0{,}0032 \times 18^3 + 0{,}06 \times 18^2 + 5$$

$$\boxed{f(18) \approx 5{,}78}$$

La dépense totale estimée en 2013 est de 5,78 milliards d'euros (arrondi au centième).

4. **a.** Calcul d'une primitive F de f sur $[0;20]$.

$$f(x) = -0{,}0032x^3 + 0{,}06x^2 + 5$$

$$F(x) = -0{,}0032\frac{x^4}{4} + 0{,}06\frac{x^3}{3} + 5x$$

$$\boxed{F(x) = -0{,}0008x^4 + 0{,}02x^3 + 5x}$$

b. La dépense moyenne des ménages entre le 1er janvier 1995 et le 1er janvier 2005 est exprimée par

$$M = \frac{1}{20}\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{20}\left[F(x)\right]_0^{20} = \frac{1}{20}\left[F(20) - F(0)\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left[-0{,}000\,8 \times 20^4 + 0{,}02 \times 20^3 + 5 \times 20 \;-\; 0\right] = \frac{132}{20}$$

$$\boxed{M = 6{,}6}$$

La dépense moyenne des ménages en 20 ans sur la période 1995–2005 est de 6,6 milliards d'euros.

Exercice **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité en ES

Partie A : étude du trajet

1. Utilisons l'algorithme de Dijkstra pour calculer le trajet le plus court entre Aoste et Florence.

choix	**à T**	**à M**	**à P**	**à LS**	**à G**	**à B**	**à F**
A	120A	174	∞	∞	∞	∞	∞
T(120A)	–	~~260~~ 174A	366	∞	288	∞	∞
M(174A)	–	–	300M	∞	∞	∞	∞
P(300M)	–	–	–	419	∞	398P	∞
B(398P)	–	–	–	–	–	–	502B
F(502B)	–	–	–	–	–	–	–

Par lecture de la première colonne de bas en haut, on détermine le chemin inverse F–B–P–M–A.

La chaîne la plus courte entre les sommets A et F est A–M–P–B–F et a pour longueur 502.

Le plus court trajet entre Aoste et Florence effectue l'itinéraire

Aoste, Milan, Parme, Bologne et Florence pour une distance de 502 km.

Remarque : à part pour les sommets de départ et arrivée, l'ordre des sommets dans le tableau n'a pas d'importance, donc chacun peut obtenir un tableau différent. Mais le résultat est le même.

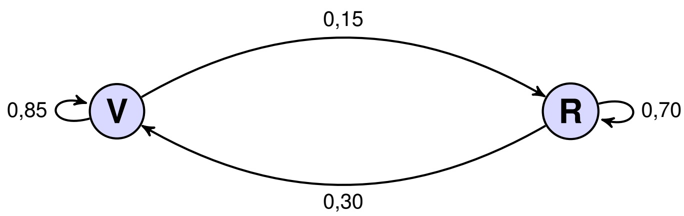
2. Un trajet en camion coûte en carburant 0,51 euro au kilomètre. Donc quatre trajets aller-retour Aoste – Florence coûtent $502 \times 0{,}51 \times 2 \times 4 = 2\,048$ euros.

Le budget carburant est de 2 048 euros pour les quatre voyages aller-retour du mois.

Le montant de la prime versée en fin de mois est donc $\boxed{P = 2\,200 - 2\,048 = 152 \text{ euros}}$.

Partie B : traversée de Parme

1. La traversée de Parme est modélisée par deux états probabilistes « Le feu est vert » (V) et « Le feu est rouge » (R), et les probabilités de transition de l'un vers l'autre de ces états. Cette situation est représentée par le graphe probabiliste suivant



2. La matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V,R), s'écrit

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}70 \end{pmatrix}}$$

3. **a.** Le premier feu rencontré est vert, donc $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}70 \end{pmatrix} \qquad P_3 = P_2 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}70 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{P_3 = \begin{pmatrix} 0{,}7675 & 0{,}2325 \end{pmatrix}}$$

b. La probabilité p de l'évènement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu » est indiquée par l'élément de la deuxième colonne de P_3, soit $\boxed{p = 23{,}25\,\%}$.