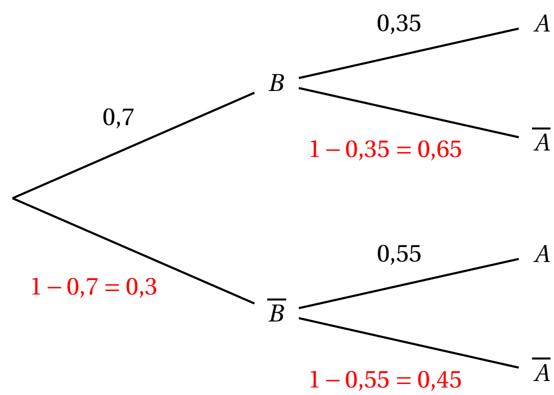
Durée : 3 heures

∾ Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L – Centres Étrangers juin 2019 ∾

Exercice 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



2. D'après la formule des probabilités totales,
$P(A) = p(A\cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = p(B) \times P_B(A) + P\left(\overline{B}\right) \times P_{\overline{B}}(A) = 0,7\times 0,35 + 0,3\times 0,55 = 0,41$

3. D'après la formule de Bayes, $P_A(B) = \dfrac{P(B\cap A)}{p(A)} = \dfrac{0,7\times 0,35}{0,41} \approx 0,598 > 0,5$.
Donc le directeur proposera la location de l'audioguide sur le site internet.

Partie B

1. $T \sim \mathcal{N}\left(10\,;\,2^2\right)$.
$P(T \leqslant 6) = P(T \leqslant 10) - P(6 \leqslant T \leqslant 10) = 0,5 - P(6\leqslant T \leqslant 10) \approx 0,023$.

2. $P(6 \leqslant T \leqslant 14) = P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

3. $P(T \geqslant a) = 0,25 \iff 1 - P(T \leqslant a) = 0,25 \iff P(T \leqslant a) = 0,75$
À l'aide de la calculatrice, en inversant la loi normale, on trouve : $a \approx 11,35$.
25 % des visiteurs passe plus de 11,35 minutes dans le magasin.

4. $n = 720$ et $p = 0,25$. On vérifie les trois conditions : $n \geqslant 30$; $np = 180 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 540 \geqslant 5$.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est : $I_n = \left[p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]$.
Ainsi : $I_{720} = \left[0,25 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,25\times 0,75}{720}}\,;\, 0,25 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,25\times 0,75}{720}}\right] \approx [0,218\,;\,0,282]$.
La fréquence observée est égale à : $f = \dfrac{161}{720} \approx 0,224$. Et $f \in I_{720}$. Donc le résultat du contrôle ne remet pas en question l'hypothèse.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. L'intervalle de confiance au seuil des 95 % est : $I_n = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Avec $n = 3000$ et $f = \dfrac{817}{3000}$, on obtient $I_{3000} \approx [0,254\,;\,0,291]$ **Réponse D**

2. On calcule les 36 % de 4 200 : $0,36 \times 4200 = 1512$ **Réponse B**

3. L'algorithme permettant de répondre au problème est un algorithme de seuil, ici fixé à 30 000 :

```
A ← 150
N ← 1
Tant que A ⩽ 30000 faire
        A ← 2 × A
        N ← N + 1
Fin tant que
```

Réponse B

4. La variable donnant le temps d'attente T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;\,10]$.

Ainsi $P(T \geqslant 5) = P(5 \leqslant T \leqslant 10) = \dfrac{10-5}{10-1} = \dfrac{5}{9}$ **Réponse D**

Exercice 3 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Ce graphe n'est pas complet car tous les sommets ne sont pas reliés entre eux : par exemple les sommets M et P ne sont pas reliés.

b. Ce graphe est connexe car on peut relier, directement ou non, n'importe quel sommet à n'importe quel autre sommet du graphe par une chaine.

2. Le tableau suivant donne les degrés des différents sommets :

Sommet	E	F	M	P	R	V
Degré	4	4	2	4	3	3

Il y a donc deux sommets de degré impair : il existe donc une chaine eulérienne ayant comme point de départ et point d'arrivée les points R et V (ou V et R).

Exemple : R – E – M – F – E – P – R – V – P – F – V.

3. a. La matrice d'adjacence est une matrice carré de dimension 6 et symétrique car le graphe n'est pas orienté. Elle se construit en mettant 0 si les sommets ne sont pas reliés, et 1 s'ils le sont.

On obtient donc : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b. La matrice N^3 permet de déterminer le nombre de chemins de longueur 3 reliant les différents sommets. Si on veut relier les sommets E et V, on lit le coefficient ligne 1 colonne 6 (ou ligne 6 colonne 1) : ici on trouve 5. Il y a donc 5 chemins de longueur 3 reliant E et V.

4. Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de R vers M, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

E	F	M	P	R	V	Sommet choisi
5 (R)	∞	∞	4 (R)	0	10 (R)	P (4)
5 (R) ~~7 (P)~~	11 (P)	∞			~~10 (R)~~ 9 (P)	E (5)
	~~11 (P)~~ 11 (E)	13 (E)			9 (P)	V (9)
	~~11 (E)~~ 10 (V)	13 (E)				F (10)
		~~13 (E)~~ 12 (F)				M (12)

Le trajet le plus court de R à M est de longueur 12 : $R \xrightarrow{4} P \xrightarrow{5} V \xrightarrow{1} F \xrightarrow{2} M$.

Exercice 3 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

1. **a.** $u_1 = 150 \times 0,8 + 35 = 155$. Au 1$^{\text{er}}$ juillet 2019, le loueur aura 155 vélos.

   b. Le terme u_n correspond au nombre de vélos l'année $(2018+n)$, u_{n+1} le nombre de vélos l'année suivante. D'une année à l'autre il vend 20 % de son stock, il lui en reste donc 80 % soit $0,8 \times u_n$. Puis il ajoute 35 nouveaux vélos. Donc il aura l'année suivante $0,8 \times u_n + 35$.

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$

2. **a.** Dans la cellule $B3$, il faut saisir : $= 0,8 * \text{B2} + 35$

   b. Le tableau donnant les termes de la suite pour n allant de 38 à 42 permet de conjecturer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 175$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 175$

   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 175 = 0,8u_n + 35 - 175 = 0,8u_n - 140 = 0,8\left(u_n - \dfrac{140}{0,8}\right) = 0,8(u_n - 175) = 0,8v_n$

   Donc la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 175 = -25$

   b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0,8^n$.

   De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 175 = -25 \times 0,8^n + 175$.

   c. La suite géométrique (v_n) a pour raison $q = 0,8$. $q \in]-1\,;\,1[$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + 175 = 0 + 175 = 175$.

4. $u_n \geqslant 170 \iff -25 \times 0,8^n + 175 \geqslant 170 \iff -25 \times 0,8^n \geqslant -5 \iff 0,8^n \leqslant \dfrac{-5}{-25} \iff \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

   $\iff n \times \ln(0,8) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}{\ln(0,8)}$ car $\ln(0,8) < 0$. $\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}{\ln(0,8)} \approx 7,21$ donc $n \geqslant 8$

   Au bout de 8 années, soit le 1$^{\text{er}}$ juillet 2026, le loueur possèdera plus de 170 vélos dans son stock.

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f(0) = 2$ (point $A(0\,;\,2)$) et $f(2) = 0$ (point $B(2\,;\,0)$).
2. Au point d'abscisse la tangente à $(C)_f$ est horizontale donc $f'(1) = 0$.

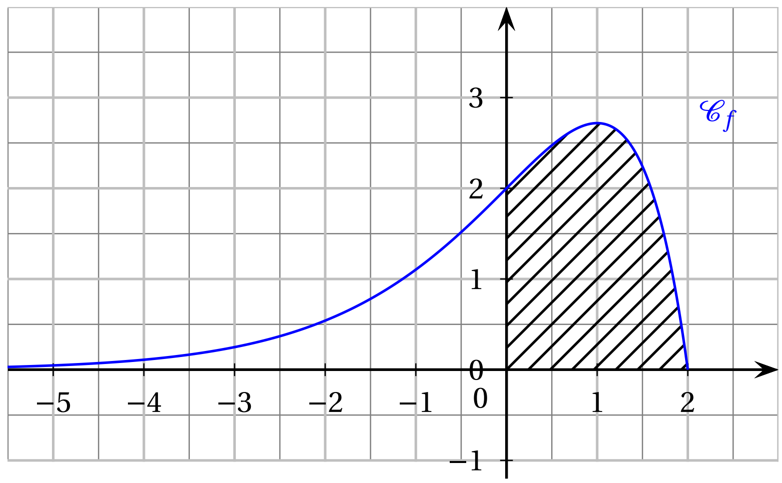
3. La tangente à $(C)_f$ est la droite (AC). Son équation est de la forme : $y = mx + p$.
$m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{-2-0} = 1$ et $p = y_A - m \times x_A = 2 - 1 \times 0 = 2$.
L'équation de la tangente à $(C)_f$ au point A a pour équation : $y = x + 2$.

4. À l'aide du graphique, on peut affirmer que sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions distinctes l'une positive, l'autre négative.

5. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-10\,;\,1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

6. La tangente à $(C)_f$ au point d'abscisse 0 (point A) coupe la courbe : le point A est donc un point d'inflexion. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-10\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,2]$.

7. a. $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Le domaine dont l'aire correspond à I est :



b. Il faut remarquer qu'une unité d'aire correspond à 4 petit carreaux. En comptant ces petits carreaux, puis en divisant par 4, on peut conjecturer que $4 \leqslant I \leqslant 5$.

Partie B

1. $f(0) = (2-0)\,\mathrm{e}^{0} = 2$ et $f(2) = (2-2)\,\mathrm{e}^{2} = 0$

2. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[-10\,;\,2]$. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, et en posant $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$,
$\forall x \in [-10\,;\,2]$, $f'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{x} + (2-x) \times \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \times (-1 + 2 - x) = \mathrm{e}^{x}(-x+1) = (-x+1)\,\mathrm{e}^{x}$

b. $f'(1) = (-1+1)\,\mathrm{e}^{1} = 0$

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
Or $f'(0) = (-0+1)\,\mathrm{e}^{0} = 1$ et $f(0) = (2-0)\,\mathrm{e}^{0} = 2$ donc l'équation de la tangente est $y = 1 \times (x-0) + 2 = x + 2$

4. a. $\forall x \in [-10\,;\,2]$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x+1$
Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ est :

x	-10		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$12\,\mathrm{e}^{-10}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

$f(-10) = 12\,\text{e}^{-10} \approx 0{,}0005$ $\qquad f(1) = (2-1)\,\text{e}^{1} = \text{e} \approx 2{,}72$ $\qquad f(2) = 0$

b. Il faut appliquer deux fois le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

— la fonction f est continue ee strictement croissante sur $[-10\,;\,1]$. Or $1 \in [12\,\text{e}^{-10}\,;\,\text{e}\,]$, donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-10\,;\,1]$.
À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx -1{,}15$

— la fonction f est continue ee strictement décroissante sur $[1\,;\,2]$. Or $1 \in [0\,;\,\text{e}\,]$, donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,;\,2]$.
À l'aide de la calculatrice, $\beta \approx 1{,}84$

Donc en conclusion l'équation $f(x) = 1$ admet deux solution sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$

5. La dernière ligne du tableau nous donne la dérivée seconde de la fonction f.
Ainsi, $\forall x \in [-10\,;\,2]$, $f''(x) = -x\,\text{e}^{x}$
$\forall x \in [-10\,;\,2]$, $\text{e}^{x} > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $-x$.
Le tableau suivant, permet d'étudier la convexité de la fonction f :

x	-10		0		2
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
Convexité de f		convexe		concave	

6. a. La fonction F est continue et dérivable sur $[-10\,;\,2]$. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, et en posant $u(x) = 3 - x$ et $v(x) = \text{e}^{x}$,
$\forall x \in [-10\,;\,2]$, $F'(x) = -1 \times \text{e}^{x} + (3-x) \times \text{e}^{x} = \text{e}^{x} \times (-1+3-x) = \text{e}^{x}(2-x) = f(x)$
La fonction F est donc une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.

b. $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x = \left[F(x)\right]_0^2 = F(2) - F(0) = (3-2)\,\text{e}^{2} - (3-0)\,\text{e}^{0} = e^2 - 3 \approx 4{,}39$