∽ Corrigé du baccalauréat Centres étrangers ES 11 juin 2018 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \text{e}^{-3x} + \text{e}^2$.

   Pour tout réel x, $f'(x) = -3 \times \text{e}^{-3x} + 0 = -3\text{e}^{-3x}$ **Réponse C**

2. D'après une étude, le nombre d'objets connectés à Internet à travers le monde est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017. L'arrondi au dixième du taux d'évolution annuel moyen est de :

   Soit t le taux moyen annuel. De 2010 à 2017, 7 années se sont écoulées. Passer de 4 milliards à 15 milliards, correspond à un taux total de $\dfrac{15}{4} = 3,75$. On en déduit que : $t^7 = 3,75$ donc $t = ^7\sqrt{3,75} \approx 1,208$, soit une augmentation de 20,8 % environ. **Réponse D**

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 13$ et d'écart-type $\sigma = 2,4$. L'arrondi au centième de $P(X \geqslant 12,5)$ est :

   $P(X \geqslant 12,5) = 0,5 + P(12,5 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0,583$. **Réponse A**

4. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[14\,;\,16]$. $P(X \leqslant 15,5)$ est égal à :

   $P(X \leqslant 15,5) = \dfrac{15,5-14}{16-14} = \dfrac{1,5}{2} = 0,75$. **Réponse B**

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. Augmenter de 2 %, revient à multiplier par 1,02.
   Donc $a_1 = 1,02 \times a_0 - 100 = 1,02 \times 2000 - 100 = 1940$ et $a_2 = 1,02 \times a_1 - 100 = 1,02 \times 1940 - 100 = 1978,8$

2. On affirme que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 1,02a_n - 100$.

   a. Augmenter de 2 %, revient à multiplier par 1,02.
   Pour tout entier naturel n, on note par a_n la masse l'algues le jour n, et par a_{n+1} celle du jour $n+1$.
   Donc pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n \times 1,02 - 100 = 1,02a_n - 100$

   b. On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $b_n = a_n - 5000$.
   Pour tout entier naturel n,
   $b_{n+1} = a_{n+1} - 5000 = 1,02a_n - 100 - 5000 = 1,02a_n - 5100 = 1,02\left(a_n - \dfrac{5100}{1,02}\right)$
   $= 1,02(a_n - 5000) = 1,02b_n$
   Donc la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,02$, et de premier terme $b_0 = a_0 - 5000 = -3000$.

   c. D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $b_n = b_0 \times q^n = -3000 \times 1,02^n$.
   De plus $a_n = b_n + 5000 = -3000 \times 1,02^n + 5000$.

   d. $q > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1,02^n = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$
   Donc à partir d'un certain rang N, pour tout entier naturel n supérieur à N, $a_n \leqslant 0$. Les algues finiront donc par disparaître au bout d'un minimum de N jours.

3. **a.** L'algorithme suivant détermine le nombre de jours nécessaire à la disparition des algues.

$N \leftarrow 0$
$A \leftarrow 2000$
Tant que $A \geqslant 0$
$\quad A \leftarrow 1{,}02A - 100$
$\quad N \leftarrow N+1$
Fin Tant que
Afficher N

b. L'algorithme renvoie la valeur $N = 26$. En effet, $a_{25} \approx 78{,}2$ et $a_{26} \approx -20{,}15$.

4. a. $5000 - 3000 \times 1{,}02^n \leqslant 0 \iff -3000 \times 1{,}02^n \leqslant -5000 \iff 1{,}02^n \geqslant \dfrac{-5000}{-3000}$

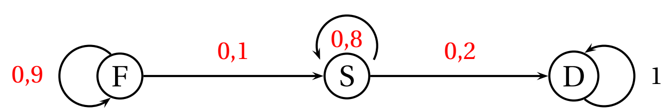
$$\iff \ln(1{,}02^n) \geqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right) \iff n \times \ln(1{,}02) \geqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right) \iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}02)} \iff n \geqslant 26.$$

b. Au bout de 26 jours, la totalité des algues aura disparu.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Le graphe probabiliste ci-après qui représente les évolutions possibles de l'état d'un automate.



b. Le nombre 1 qui apparaît sur ce graphe, signifie que la totalité des automates défectueux le reste.

c. Le coefficient 0,2 correspond aux 20 % des automates en sursis qui deviennent défectueux.

2. a. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\end{pmatrix}$.

b. $P_1 = P_0 \times M^3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0{,}729 & 0{,}217 & 0{,}054\end{pmatrix}$

c. Soit $P = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ un état stable, avec $x+y+z=1$. Nous avons : $P = P \times M$. Cela donne :

$P = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}9x & 0{,}1x+0{,}8y & 0{,}2y+z\end{pmatrix}$.

On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}0{,}9x &=& x\\ 0{,}1x+0{,}8y &=& y\\ 0{,}2y+z &=& z\\ x+y+z &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}-0{,}1x &=& 0\\ 0{,}1x-0{,}2y &=& 0\\ 0{,}2y &=& 0\\ x+y+z &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& 0\\ y &=& 0\\ x+y+z &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& 0\\ y &=& 0\\ z &=& 1\end{array}\right.$$

Donc $P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est l'unique état stable. Cela signifie qu'au bout d'un certain temps, tous les automates seront défectueux ($D = 1$).

3. a. Pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

Donc $P_{n+1} = \begin{pmatrix}f_{n+1} & s_{n+1} & d_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_n & s_n & d_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$

$P_{n+1} = \begin{pmatrix}0,9f_n & 0,1f_n + 0,8s_n & 0,2s_n + d_n\end{pmatrix}$.
Donc $f_{n+1} = 0,9f_n$, $s_{n+1} = 0,1f_n + 0,8s_n$ et $d_{n+1} = 0,2s_n + d_n$.
Donc pour tout entier naturel n, $s_{n+1} = 0,1f_n + 0,8s_n$.

b. L'algorithme ci-dessous affiche le nombre de jours au bout duquel 30 % des automates ne fonctionnent plus.

```
D ← 0
S ← 0
F ← 1
N ← 0
Tant que D ⩽ 0,30
        D ← 0,2 × S + D
        S ← 0,1 × F + 0,8 × S
        F ← 0,9 × F
        N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

c. La tableau suivant donne les valeurs de N, D, S et F :

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
D	0	0	0,02	0,054	0,0974	0,1467	0,1932	0,2531	0,3068
S	0	0,1	0,17	0,217	0,2465	0,2628	0,2693	0,2686	0,2627
F	1	0,9	0,82	0,729	0,6561	0,5905	0,5314	0,4783	0,4305

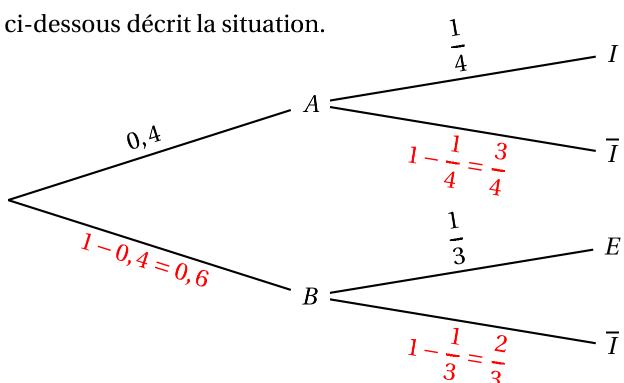
L'algorithme affiche donc la valeur 8. Il faudra donc 8 jours pour que plus de 30 % des automates ne fonctionnent plus.

d. Si on change l'ordre des affectations dans la boucle, les différentes valeurs de D, S et F changent. Par exemple, si la ligne $F \leftarrow 0,9 \times F$ passe en premier, lors que la première boucle, F prendra la valeur 0,9 (au lieu de 1). La valeur de D qui suit ne change pas et reste à 0,1. Mais la valeur de S change pour passer à 0,09 (au lieu de 0,1).

Exercice 3 — 5 points

1. On choisit au hasard une guirlande dans le stock.

a. L'arbre pondéré ci-dessous décrit la situation.



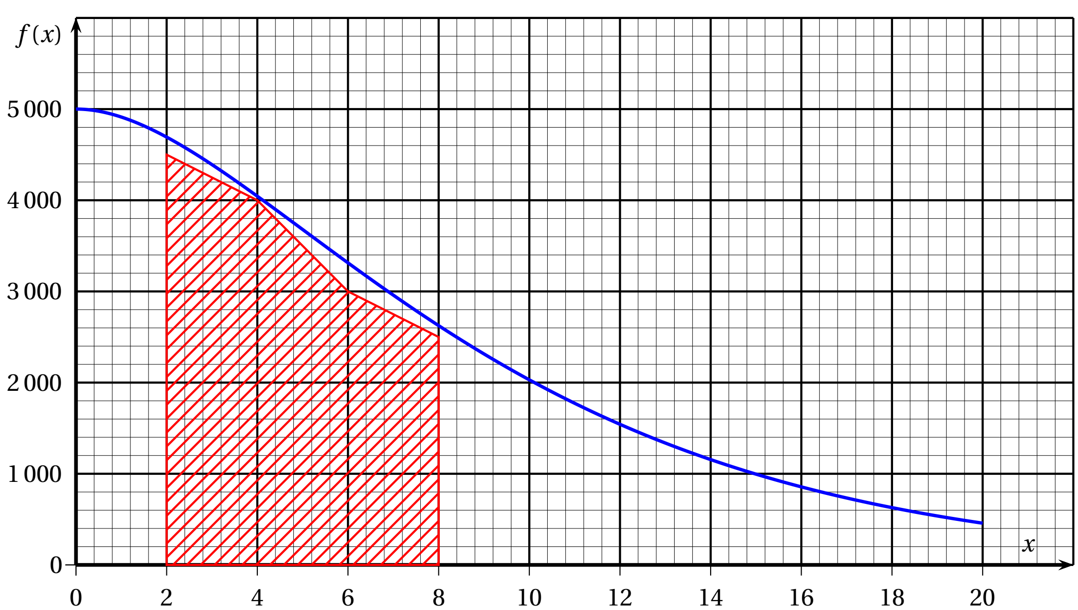
b. Formule des probabilités totales :
$p(I) = p(A\cap I) + p(B\cap I) = p(A)\times p_A(I) + p(B)\times p_B(I) = 0,4\times\frac{1}{4} + 0,6\times\frac{1}{3} = 0,1+0,2 = 0,3$

c. Formule de Bayes : $p_{\overline{I}}(A) = \dfrac{p(A\cap\overline{I})}{p(\overline{I})} = \dfrac{p(A)\times p_A(\overline{I})}{p(\overline{I})} = \dfrac{0,4\times\frac{3}{4}}{1-0,3} = \dfrac{0,3}{0.7} = \dfrac{3}{7} \neq \dfrac{1}{2}$.
Le responsable de l'entreprise a tort d'estimer qu'il y a autant de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B.

2. Le prix moyen sera : $E = 3 \times p(I) + 5 \times p(\overline{I}) = 4,4$ €
3. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de guirlandes défectueuses, dans un lot de 50.
   X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,02$.
   $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,02)^{50} \approx 0,636$
4. L'amplitude d'un intervalle de confiance est : $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$. Chercher une amplitude inférieure ou égale à 0,08 revient à résoudre : $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,08$.
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,08 \iff \dfrac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \dfrac{1}{0,08} \iff \dfrac{\sqrt{n}}{2} \geqslant 12,5 \iff \sqrt{n} \geqslant 25 \iff n \geqslant 625.$
   L'entreprise doit interroger 625 clients au minimum.

EXERCICE 4 **6 POINTS**

1. Graphiquement l'équation $f(x) = 3\,000$ admet comme solution : $x \approx 7$ (dans la limite de précision du graphique).
2. La partie hachurée ci-dessous a été uniquement tracée avec des carreaux entiers, des moitiés ou des quarts. Son aire correspond à 10,5 carreaux. Chaque carreau correspond à 2 000 unités d'aires, donc $I \approx 21\,000$ unités d'aires.
   Remarques :
   — avec la calculatrice on trouve $I \approx 22\,000$;
   — En comptant les petits carreaux (le 25[e] d'un grand carreau, soit $\dfrac{2\,000}{25} = 80$ unités d'aires), on trouve (environ) 271 petits carreaux entiers, soit en unités d'aires : $271 \times 80 = 21\,680$ unités d'aire.
   avec la calculatrice on trouve $I \approx 22\,000$.



Partie B - Étude théorique

1. On admet que f est dérivable sur $[0\,;\,20]$. Donc pour tout réel x appartient à l'intervalle $[0\,;\,20]$:
$f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 1\,000(x+5) = 1\,000x + 5\,000$ et $v(x) = \text{e}^{-0,2x}$.
En écrivant $u'(x) = 1\,000$ et $v'(x) = -0,2\text{e}^{-0,2x}$,
$f'(x) = 1\,000 \times \text{e}^{-0,2x} + 1\,000(x+5) \times -0,2\text{e}^{-0,2x} = 1\,000\text{e}^{-0,2x}(1 + (x+5) \times -0,2) = 1\,000\text{e}^{-0,2x}(-0.2x) = -200x\text{e}^{-0,2x}$

2. Pour tout réel $x \in [0\,;\,20]$, $-200x \leqslant 0$ et $\text{e}^{-0,2x} > 0$, donc $f'(x) \leqslant 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\,20]$. Donc le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;\,20]$ est :

x	0	20
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$5\,000$ ↘	$25\,000\text{e}^{-4}$

$f(0) = 5\,000$ et $f(20) = 25\,000\text{e}^{-4} \approx 458$.

3. Sur l'intervalle $[0\,;\,20]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. Or $3\,000 \in \left[25\,000\text{e}^{-4}\,;\,5\,000\right]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3\,000$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;\,20]$. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx 6,88$

4. $\displaystyle\int_2^8 f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_2^8 = F(8) - F(2) = -90\,000\text{e}^{-1,6} + 60\,000\text{e}^{-0,4} \approx 22\,048$

Partie C - Application économique

1. D'après les questions 2 et 3 de la partie B, on en déduit que si $x \leqslant \alpha$ ($\alpha \approx 6,88$) alors
$f(x) \leqslant 3\,000$. Donc le prix unitaire doit être inférieur à 6,88 €.

2. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;\,8]$. Interpréter ce résultat.

3. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 8]$ est égale à :
$\displaystyle\frac{1}{8-2}\int_2^8 f(x)\,\text{d}x = \frac{1}{6} \times [F(8) - F(2)] \approx 3\,675$.
Cela signifie que, pour un prix unitaire compris entre 2 et 8 euros, la quantité d'objets demandés sera en moyenne égale à 3 675.