A. P. M. E. P.

Baccalauréat ES/L Amérique du Sud 13 novembre 2019

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Pour les questions 1 et 2, on considère une entreprise qui produit des plaquettes de beurre de 250 grammes.

1. Réponse C.
2. La fréquence de tablettes conformes est $\dfrac{864}{900}$.
   L'intervalle de confiance est $\left[\dfrac{864}{900} - \dfrac{1}{\sqrt{900}}\ ;\ \dfrac{864}{900} + \dfrac{1}{\sqrt{900}}\right] \approx [0{,}926\ ;\ 0{,}994]$: réponse B.
3. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée des tickets gagnants pour un échantillon de 200 tickets tirés au hasard est :
   $$\left[p - 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right] \approx [0{,}144\ ;\ 0{,}256]\ ;\text{réponse D.}$$
4. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$ par : $f(x) = x^3 - 39x^2 + 315x + 45$.
   On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
   Sur l'intervalle $[0\ ;\ 30]$, on a $f'(x) = 3x^2 - 78x + 315$, puis
   $f''(x) = 6x - 78 = 6(x - 13)$ qui est du signe de $x - 13$:
   - si $x < 13$, $x - 13 < 0$; $f''(x) < 0$ sur $[0\ ;\ 13[$;
   - si $x > 13$, $x - 13 > 0$; $f''(x) > 0$ sur $]13\ ;\ 30[$
   - si $x = 13$, $x - 13 = 0$; $f''(13) = 0$.

   La dérivée seconde s'annule en changeant de signe donc $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 13. Réponse C.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. - $u_1 = 0{,}96 \times 5000 + 300 = 5\,100$;
   - $u_2 = 0{,}96 \times 5\,100 + 300 = 5\,196$.

   Le 1er janvier 2020, l'arboriculteur aura 5 196 pommiers.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.
   a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 7500 = 0{,}96u_n + 300 - 7500 = 0{,}96u_n - 7200 = 0{,}96\left(u_n - \frac{7\,200}{0{,}96}\right) = 0{,}96\,(u_n - 7\,500) = 0{,}96v_n$.
   $v_{n+1} = 0{,}96v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 ; son premier terme est $v_0 = u_0 - 7\,500 = 5\,000 - 7\,500 = -2\,500$.
   b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}96^n = -2\,500 \times 0{,}96^n$.
   c. $v_n = u_n - 7\,500$ entraîne $u_n = v_n + 7\,500 = -2\,500 \times 0{,}96^n + 7\,500$.
   Donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\,500 - 2\,500 \times 0{,}96^n$.
3.

Ligne 1	$n \leftarrow 0$
Ligne 2	$u \leftarrow 5\,000$
Ligne 3	Tant que $u \leqslant 6\,000$
Ligne 4	$\quad n \leftarrow n + 1$
Ligne 5	$\quad u \leftarrow 0{,}96 \times u + 300$
Ligne 6	Fin tant que

a. Voir ci-dessus en rouge.

b. On aura $n = 13$.

Jusqu'à la 12e année ($u_{12} \approx 5968$) le nombre de pommiers est inférieur ou égal à 6 000.

4. Comme $0 < 0{,}96 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}96^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2500 \times 0{,}96^n = 0$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 7500$.

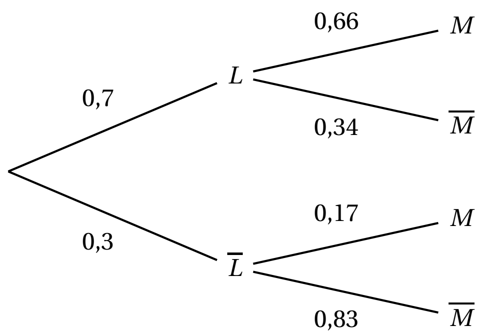
Le nombre de pommiers va tendre vers 7 500.

Exercice 3 — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. L'énoncé donne $P(L) = 0{,}7$, $P_L(M) = 0{,}66$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right) = 1 - 0{,}83 = 0{,}17$.

2. On complète l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



3. On calcule $P(L \cap M) = P(L) \times P_L(M) = 0{,}7 \times 0{,}66 = 0{,}462$.

4. On calcule de même $P\left(\overline{L} \cap M\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(M) = 0{,}3 \times 0{,}17 = 0{,}051$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(M) = P(L \cap M) + P\left(\overline{L} \cap M\right) = 0{,}462 + 0{,}051 = 0{,}513$.

5. La probabilité d'avoir un licencié parmi ceux qui ont fait le parcours en moins de 5 heures est égale à :

$P_M(L) = \dfrac{P(M \cap L)}{P(M)} = \dfrac{0{,}462}{0{,}513} = \dfrac{462}{513} \approx 0{,}9006$ soit effectivement un tout petit plus de 90 %.

6. a. Les choix étant indépendants, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}513$.

b. $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0{,}513^4 \times (1 - 0{,}513)^{10-4} = \binom{10}{4} \times 0{,}513^4 \times 0{,}487^6 \approx 0{,}194$ au millième près.

c. La probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures est égale à :

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= \binom{10}{0} \times 0{,}513^0 \times 0{,}487^{10} + \binom{10}{1} \times 0{,}513^1 \times 0{,}487^9 + \binom{10}{2} \times 0{,}513^2 \times 0{,}487^8 + \binom{10}{3} \times 0{,}513^3 \times 0{,}487^7$

$\approx 0{,}00075 + 0{,}0079 + 0{,}0375 + 0{,}1053$

soit environ 0,151 38, donc 0,151 au millième près.

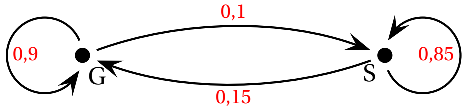
Exercice 3 — 5 points

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Graphe probabiliste représentant la situation :



2. La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$.

3. $P_0 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,58 \end{pmatrix}$

   $P_1 = P_0M = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,42 \times 0,9 + 0,58 \times 0,15 & 0,58 \times 0,85 + 0,42 \times 0,1 \end{pmatrix}$
   $= \begin{pmatrix} 0,465 & 0,535 \end{pmatrix}$.

   Donc 46,5 % des cyclistes participeront au grand parcours en 2019.

4. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ la matrice associée à l'état stable de ce graphe.

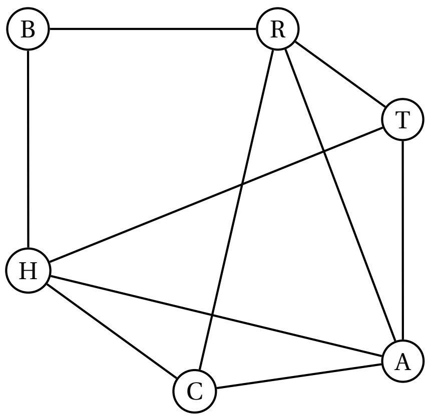
   a. Si P est l'état stable, alors $P = PM$, soit $\left\{\begin{array}{rcl} 0,9x + 0,15y & = & x \\ 0,1x + 0,85y & = & y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -0,1x + 0,15y & = & 0 \\ 0,1x - 0,15y & = & 0 \end{array}\right.$

   On a donc $0,1x - 0,15y = 0$ ou $x - 1,5y = 0$ avec $x + y = 1$, on a $1 - y - 1,5y = 0 \iff 1 = 2,5y \iff y = \dfrac{1}{2,5} \iff y = 0,4$ et $x = 1 - y = 1 - 0,4 = 0,6$.

   L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

   b. D'après ce modèle c'est à long terme le grand parcours qui sera le plus choisi (à 60 %).

Partie B



1.
   - Ce graphe n'est pas complet : pas d'arête entre A et B.
   - Ce graphe est connexe car il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques : la chaîne A - C - H - B - R - T contient tous les sommets.

2. Les degrés des sommets sont respectivement :

   A : 4 B : 2 C : 3 H : 4 R : 4 T : 3

   Tous les sommets sont de degré pair sauf 2, donc ce graphe connexe admet, d'après le théorème d'Euler, une chaîne eulérienne.

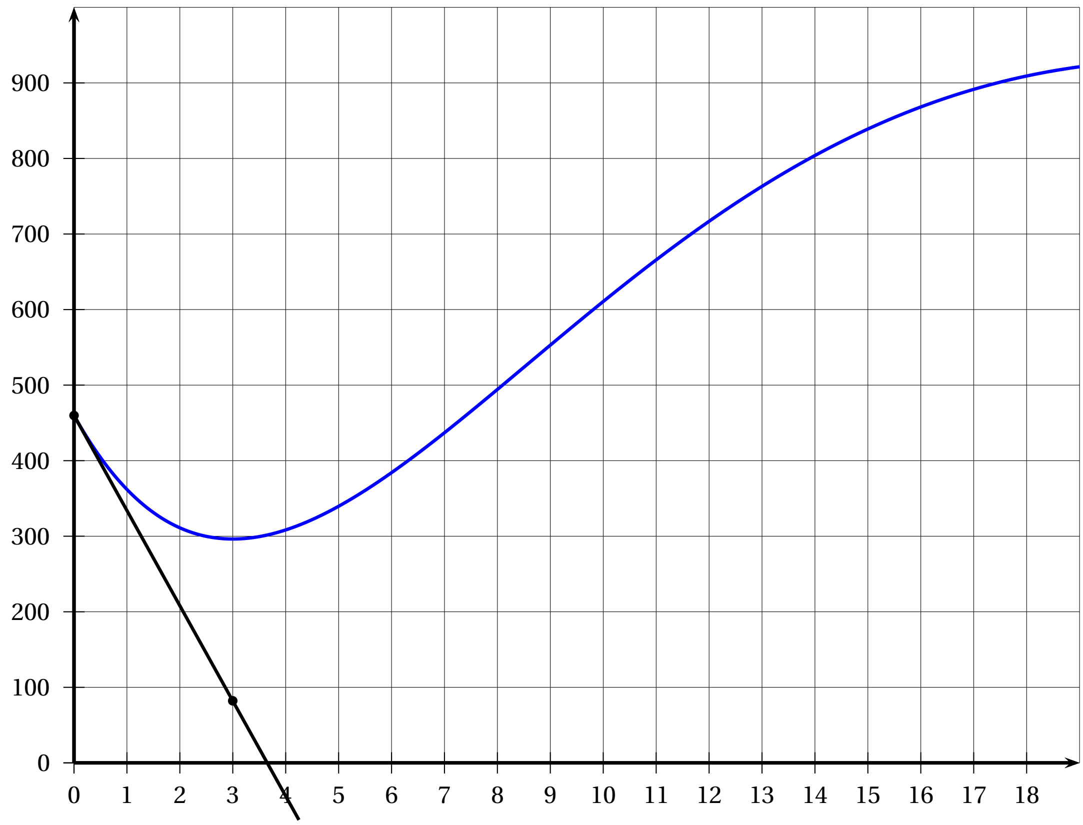
   Les sommets C et T de degré impair sont les extrémités de la chaîne ; par exemple la chaîne : C – R – T – A – H – C – A – R – B – H – T.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

La courbe (C) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,19]$, représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. De 2000 à 2003, l'audience a baissé de 460 000 à 300 000 téléspectateurs, puis de 2003 à 2019 a régulièrement progressé à plus de 900 000 téléspectateurs.
2. On lit en 2014 environ 800 000 téléspectateurs.
3. $f'(0)$ nombre dérivé de la fonction en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB), soit : $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{82 - 460}{3 - 0} = \dfrac{-378}{3} = -126.$

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.
On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,29]$ par :

$$f(x) = \left(20x^2 - 80x + 460\right)\mathrm{e}^{-0,1x}.$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. 2014 correspond à $x = 14$. D'où $f(14) = \left(20 \times 14^2 - 80 \times 14 + 460\right)\mathrm{e}^{-0,1\times 14} \approx 803,906$ soit 804 milliers de téléspectateurs à un millier près.

2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\,;29]$.

a. f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;29]$ et sur cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\times 20x-80)\mathrm{e}^{-0,1x}+\left(20x^2-80x+460\right)(-0,1)\mathrm{e}^{-0,1x} \\ &= \left(40x-80-2x^2+8x-46\right)\mathrm{e}^{-0,1x}=\left(-2x^2+48x-126\right)\mathrm{e}^{-0,1x}.\end{aligned}$$

Rem. On peut vérifier que $f'(0)=-126$ (cf. question **3.** de la partie A.)

b. On considère l'équation : $-2x^2+48x-126=0$.

$-2x^2+48x-126=0 \iff -x^2+24x-63=0$.

Pour ce trinôme :

$\Delta = 24^2-4\times(-1)\times(-63)=576-252=324=4\times 81=2^2\times 9^2=(2\times 9)^2=18^2$.

$\Delta>0$, donc l'équation du second degré a deux solutions :

$$x_1=\frac{-24+18}{2\times(-1)}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-24-18}{2\times(-1)}=21.$$

c. On sait que le trinôme est du signe de $a=-1$ donc négatif sauf sur $[3\,;21]$, où $f(x)\geqslant 0$.

La fonction est donc décroissante sauf sur l'intervalle $[3\,;21]$ où elle est croissante.

On a $f(0)=460$; $f(3)\approx 296$; $f(21)\approx 931$ et $f(29)\approx 826$. D'où le tableau de variations :

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	460	↘	296	↗	931	↘	826

d. Le tableau de variations de la fonction f montre que le maximum de téléspectateurs est de 931 milliers en 2021 ; la barre du million ne sera jamais atteinte entre 2000 et 2029.

3. On a vu que sur l'intervalle $[3\,;21]$ la fonction est strictement croissante de $f(3)\approx 296$ à $f(2)\approx 931$, elle est continue sue cet intervalle donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires comme $296<800<931$, il existe un réel unique $\alpha\in]3\,;21[$ tel que $f(\alpha)=800$.

La calculatrice donne $f(13)\approx 763$ et $f(14)\approx 804$, donc $13<\alpha<14$.

Comme à peu près 803 000 téléspectateurs regarderont la chaîne le 1^er^ janvier 2014, le nombre de 800 000 sera atteint à la fin de la 13^e^ année ; soit en 2013.

4. L'audience journalière moyenne de téléspectateurs de la chaîne de télévision entre le 1^er^ janvier 2018 et le 1^er^ janvier 2019 est égale, en milliers, à la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[18\,;19]$. C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{19-18}\int_{18}^{19} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[F(x)\right]_{18}^{19}=F(19)-F(18) \\ &= \left(-200\times 19^2-3200\times 19-36600\right)\mathrm{e}^{-0,1\times 19}-\left[\left(-200\times 18^2-3200\times 18-36600\right)\mathrm{e}^{-0,1\times 18}\right] \\ &\approx 915,7\end{aligned}$$

L'audience journalière moyenne est d'environ 916 000 téléspectateurs.