∽ Corrigé du baccalauréat ES/L Amérique du Sud ∽
14 novembre 2018

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

f est la fonction définie sur $[0\,;\,12]$ par $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver$(2 * x * \exp(-x))$
	$-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x)$
2	Factoriser$(-2 * x * \exp(-x) + 2 * \exp(-x))$
	$2 * (1 - x) * \exp(-x)$
3	Dériver$(2 * (1 - x) * \exp(-x))$
	$2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x)$
4	Factoriser$(2 * x * \exp(-x) - 4 * \exp(-x))$
	$2 * (x - 2) * \exp(-x)$

1. $f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x}$ donc $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times (-1)\,\mathrm{e}^{-x} = -2x\,\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}$.

2. **a.** Pour dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$, on cherche le signe de $f'(x)$ sur cet intervalle ; $f'(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x} + 2\,\mathrm{e}^{-x} = 2(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ donc s'annule et change de signe pour $x = 1$.

$f(0) = 0$; $f(1) = 2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74$ et $f(12) = 24\,\mathrm{e}^{-12} \approx 1{,}5 \times 10^{-4}$

x	0		1		12
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	$24\,\mathrm{e}^{-12}$

b. $f(0) = 0 < 0{,}5$, $f(1) \approx 0{,}74 > 0{,}5$ et $f(12) \approx 1{,}5 \times 10^{-4} < 0{,}5$

On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0	α	1	β	12
$f(x)$	0 $\nearrow$	0,5 $\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^{-1} > 0{,}5$	$\searrow$ 0,5	$\searrow$ $24\,\mathrm{e}^{-12} < 0{,}5$

On en déduit que l'équation $f(x) = 0{,}5$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.
À l'aide du solveur de la calculatrice, on trouve pour valeurs approchées au centième des solutions de l'équation $f(x) = 0{,}5$ les nombres 0,36 et 2,15.

3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ dépend du sens de variations de la fonction dérivée f' donc du signe de la fonction dérivée seconde f''.
D'après le logiciel de calcul formel, on peut dire que $f''(x) = 2(x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$ qui est du signe de $x-2$. Donc :

- sur l'intervalle $[0\,;\,2[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- sur l'intervalle $]2\,;\,12]$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$ représente le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) de cette personne.

1. **a.** D'après la partie A, le taux d'alcoolémie va croître la première heure, puis décroître les 11 heures suivantes.

b. Comme vu dans la partie A, le taux d'alcoolémie de cette personne est maximal au bout d'une heure ; il vaut alors $f(1)$ soit environ 0,74 g/L.

2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L.
Une fois l'alcool consommé, on cherche au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend une valeur conforme à la législation ; il faut que $f(x)$ redevienne inférieur à 0,5 donc que le temps soit supérieur à 2,15 heures soit 2 h 9 min.

Exercice 2 **6 points**

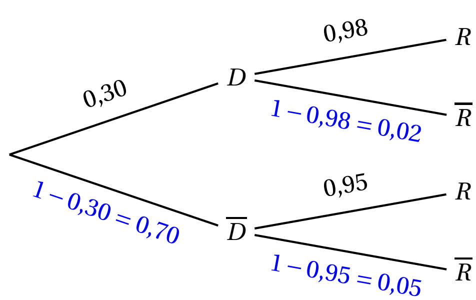
Partie A

Une entreprise produit des valises de deux types : des valises à deux roues et des valises à quatre roues. Sur chacun des deux modèles, on effectue des tests afin d'évaluer leur solidité.
On dispose des informations suivantes sur le stock de production de cette entreprise :

- le stock contient 30 % de valises à deux roues ;
- 98 % des valises à deux roues réussissent les tests ;
- 95 % des valises à quatre roues réussissent les tests.

On choisit au hasard une valise de ce stock. On considère les évènements suivants :
- D : « La valise a deux roues » ;
- R : « La valise réussit les tests ».

1. L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation.



2. La probabilité que la valise choisie réussisse les tests est $P(R)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(R) = P\left(D \cap R\right) + P\left(\overline{D} \cap R\right) = P(D) \times P_D(R) + P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(R) = 0{,}30 \times 0{,}98 + 0{,}70 \times 0{,}95$
$= 0{,}294 + 0{,}665 = 0{,}959$.

3. Sachant que la valise réussit les tests, la probabilité que ce soit une valise à quatre roues est
$P_R\left(\overline{D}\right) = \dfrac{P\left(\overline{D} \cap R\right)}{P(R)} = \dfrac{0{,}70 \times 0{,}95}{0{,}959} \approx 0{,}693$ au millième près.

Partie B

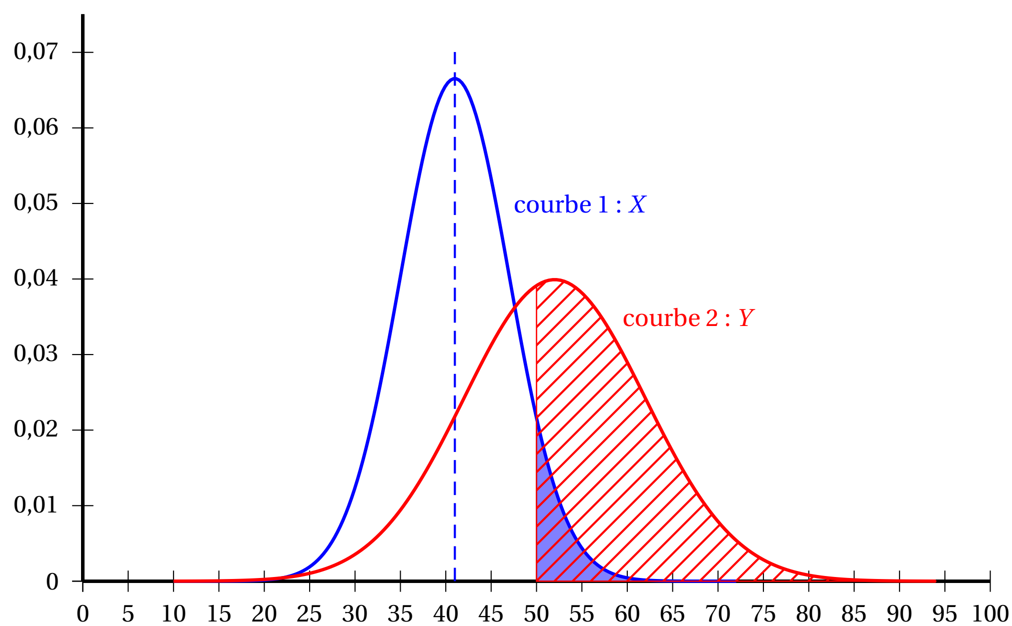
Parmi les tests de solidité effectués, l'un d'eux consiste à charger la valise et à la faire rouler sur une piste bosselée. On appelle « durée de vie » de la valise, le nombre de kilomètres parcourus avant d'atteindre une certaine usure des roues.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque valise à deux roues, associe sa durée de vie en kilomètre. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 41$ et d'écart-type $\sigma = 6$.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque valise à quatre roues, associe sa durée de vie en kilomètre. On admet que Y suit la loi normale d'espérance $\mu' = 52$ et d'écart-type $\sigma' = 10$.

1. La probabilité qu'une valise à deux roues ait une durée de vie supérieure à 52 kilomètres est $P(X > 52) \approx 0{,}033$.

2. On a représenté ci-dessous les densités associées aux variables aléatoires X et Y.
L'axe de symétrie de la courbe 1 est la droite d'équation $x = 41$ donc cette courbe correspond à la variable aléatoire X.
On colorie en bleu l'aire sous la courbe 1 correspondant à $P(X \geqslant 50)$.
La courbe 2 correspond donc à la variable aléatoire Y. On hachure en rouge l'aire correspondant à $P(Y \geqslant 50)$.



L'aire hachurée en rouge est supérieure à l'aire colorée en bleu, donc c'est pour les valises à 4 roues que la probabilité que la durée de vie soit supérieure à 50 kilomètres est la plus grande.

Partie C

L'entreprise souhaite commercialiser un nouveau modèle de valises. Afin de mieux connaître les attentes des consommateurs, elle réalise un sondage auprès de 2 000 personnes. Parmi elles, 872 déclarent que la solidité est le principal critère pris en compte lors de l'achat (devant la légèreté, le prix, la couleur ...).

1. Dans l'échantillon de taille $n = 2000$, la proportion de personnes déclarant que la solidité est le principal critère d'achat est de $f = \dfrac{872}{2000} = 0{,}436$.
   $n = 2000 \geqslant 30$, $nf = 872 \geqslant 5$ et $n\left(1-f\right) = 1128 \geqslant 5$ donc les conditions sont réunies pour que l'on puisse établir un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % de la proportion de consommateurs pour lesquels la solidité est le principal critère de choix.
   $I = \left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}436 - \dfrac{1}{\sqrt{2000}}\,;\, 0{,}436 + \dfrac{1}{\sqrt{2000}}\right] \approx \left[0{,}413\,;\, 0{,}459\right]$
2. L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$; on cherche donc n pour que $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}04$.
   $\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}04 \iff \dfrac{2}{0{,}04} = \sqrt{n} \iff 50 = \sqrt{n} \iff n = 2500$
   Il faut donc un échantillon de taille $n = 2500$ pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,04.

Exercice 3 **5 points**
Série ES : Enseignement obligatoire – Série L : Enseignement de spécialité

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit. Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché. En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.
On estime que, chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
On note a_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A pendant l'année $(2017+n)$. De même, on note b_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société B lors de l'année $(2017+n)$.
On a donc $a_0 = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}7$.

1. **a.** En 2017 la proportion d'ascenseurs entretenus pas la société A est de 0,3, et la proportion d'ascenseurs entretenus pas la société B est 0,7.

   On sait que 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante donc il en reste 97 % entretenus par A en 2018, soit une proportion de $0{,}97 \times 0{,}3 = 0{,}291$.

   On sait que 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante, ce qui fera en 2018 une proportion de $0{,}05 \times 0{,}7 = 0{,}035$.

   On aura donc $a_1 = 0{,}291 + 0{,}035 = 0{,}326$.

   On peut alors estimer qu'en 2018 la société A va entretenir 32,6 % des ascenseurs.

b. Concernant les ascenseurs entretenus par A, la société A en garde 97 % donc on garde $0{,}97a_n$.

Concernant ceux qui passent de B à A, la société en aura 0,05 % donc on garde $0{,}05b_n$.

Donc, pour tout n, $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$.

D'après le contexte, $a_n + b_1$ donc $b_n = 1 - a_n$.

On en déduit que $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05(1 - a_n) = 0{,}97a_n + 0{,}05 - 0{,}05a_n = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

2. a. Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %. Un des 3 algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3

$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0{,}5$
    $A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher $2017 + N$
	$A \leftarrow 0{,}3$
	$N \leftarrow 0$
	Tant que $A > 0{,}5$
	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
	$N \leftarrow N + 1$
	Fin Tant que
	Afficher $2017 + N$
		$A \leftarrow 0{,}3$
		$N \leftarrow 0$
		Tant que $A \leqslant 0{,}5$
		$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
		Fin Tant que
		$N \leftarrow N + 1$
		Afficher $2017 + N$

- Dans l'algorithme 2, la condition est « Tant que $A > 0{,}5$ » ; or la variable A est initialisée à 0,3 donc on n'entre jamais dans la boucle.
  On peut éliminer l'algorithme 2.
- Dans l'algorithme 3, l'instruction « $N \leftarrow N + 1$ » est exécutée en dehors de la boucle donc elle n'est exécutée qu'une seule fois ; la valeur de N en sortie d'algorithme sera toujours de 1.
  On peut éliminer l'algorithme 3.

Donc l'algorithme 1 donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

b. On exécute l'algorithme 1 en arrondissant au millième les résultats

N	A
0	0,3
1	0,326
2	0,350
3	0,372
4	0,392
5	0,411
6	0,428
7	0,444
8	0,458
9	0,472
10	0,484
11	0,495
12	0,506

On obtient $N = 12$ donc il s'affiche $2017 + 12$ soit 2029 en fin d'algorithme.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}625$. Donc $a_n = u_n + 0{,}625$.

a. • $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}625 = 0{,}92a_n + 0{,}05 - 0{,}625 = 0{,}92(u_n + 0{,}625) - 0{,}575$
$= 0{,}92u_n + 0{,}575 - 0{,}575 = 0{,}92u_n$

- $u_0 = a_0 - 0{,}625 = 0{,}3 - 0{,}626 = -0{,}325$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $u_0 = -0{,}325$.

b. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $u_0 = -0{,}325$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = -0{,}375 \times 0{,}92^n$.
Comme $a_n = u_n + 0{,}625$, on déduit que pour tout n, $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.

c. $0 < 0{,}92 < 1$ donc, d'après le cours, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}92)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0{,}625$.
Cela signifie que la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A va tendre vers 62,5 %.

4. On résout l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}5$.

$$\begin{aligned} a_n \geqslant 0{,}5 &\iff -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625 \geqslant 0{,}5 &&\iff 0{,}125 \geqslant 0{,}325 \times 0{,}92^n \\ &\iff \frac{0{,}125}{0{,}325} \geqslant 0{,}92^n &&\iff \ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right) \geqslant \ln\left(0{,}92^n\right) \\ &\iff \ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right) \geqslant n \times \ln(0{,}92) &&\iff \frac{\ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right)}{\ln(0{,}92)} \leqslant n \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right)}{\ln(0{,}92)} \approx 11{,}5$, on retrouve le nombre $N = 12$ obtenu à la fin de l'exécution de l'algorithme.

Exercice 3 **5 points**
Enseignement de spécialité

On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un contrat annuel d'entretien doit être souscrit. Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce marché. En 2017, la société A entretient 30 % de ces ascenseurs.
On estime que, chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

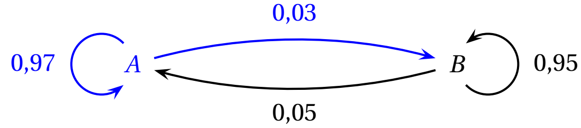
On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.
Pour un ascenseur choisi au hasard, et pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A lors de l'année $(2017+n)$;
- b_n la probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société B lors de l'année $(2017+n)$;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste de l'année $(2017+n)$.

On a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. **a.** On représente la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.



b. D'après le texte, on a : $\left\{\begin{array}{l c l} a_{n+1} & = & 0{,}97\,a_n + 0{,}05\,b_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}03\,a_n + 0{,}95\,b_n \end{array}\right.$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$

La matrice de transition de ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$ et on a pour tout n, $P_{n+1} = P_n \times M$.

2. La probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018 est a_1.

$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \times 0{,}97 + 0{,}7 \times 0{,}05 & 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}95 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0{,}326 & 0{,}674 \end{pmatrix}$

La probabilité que l'ascenseur choisi soit entretenu par la société A en 2018 est $a_1 = 0{,}326$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$.

$0{,}625 + 0{,}375 = 1$ donc P est un état du système.

$P \times M = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}03 \\ 0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}625 \times 0{,}97 + 0{,}375 \times 0{,}05 & 0{,}625 \times 0{,}03 + 0{,}375 \times 0{,}95 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix} = P$

Donc $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est un état stable du système.

4. On a vu que pour tout n, $a_{n+1} = 0{,}97\,a_n + 0{,}05\,b_n$.

D'après le contexte, pour tout n, $a_n + b_n = 1$ donc $b_n = 1 - a_n$.

On en déduit que $a_{n+1} = 0{,}97 a_n + 0{,}05\,(1 - a_n) = 0{,}97 a_n + 0{,}05 - 0{,}05 a_n = 0{,}92 a_n + 0{,}05$.

Partie B

Le directeur de la société A constate que la proportion d'ascenseurs entretenus par sa société augmente au cours des années et se stabilise à 62,5 %.

1. **a.** On cherche lequel des algorithmes suivants donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$	$A \leftarrow 0{,}3$
$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$	$N \leftarrow 0$
Tant que $A \leqslant 0{,}5$	Tant que $A > 0{,}5$	Tant que $A \leqslant 0{,}5$
$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$	$A \leftarrow 0{,}92 \times A + 0{,}05$
$N \leftarrow N + 1$	$N \leftarrow N + 1$	Fin Tant que
Fin Tant que	Fin Tant que	$N \leftarrow N + 1$
Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$	Afficher $2017 + N$

- Dans l'algorithme 2, la condition est « Tant que $A > 0{,}5$ » ; or la variable A est initialisée à 0,3 donc on n'entre jamais dans la boucle.
  On peut éliminer l'algorithme 2.
- Dans l'algorithme 3, l'instruction « $N \leftarrow N + 1$ » est exécutée en dehors de la boucle donc elle n'est exécutée qu'une seule fois ; la valeur de N en sortie d'algorithme sera toujours de 1.
  On peut éliminer l'algorithme 3.

Donc l'algorithme 1 donne l'année à partir de laquelle cette proportion dépasse 50 %.

b. On exécute l'algorithme 1 en arrondissant au millième les résultats

N	A
0	0,3
1	0,326
2	0,350
3	0,372
4	0,392
5	0,411
6	0,428
7	0,444
8	0,458
9	0,472
10	0,484
11	0,495
12	0,506

On obtient $N = 12$ donc il s'affiche $2017 + 12$ soit 2029 en fin d'algorithme.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = a_n - 0{,}625$. Donc $a_n = u_n + 0{,}625$.

a.
- $u_{n+1} = a_{n+1} - 0{,}625 = 0{,}92a_n + 0{,}05 - 0{,}625 = 0{,}92\,(u_n + 0{,}625) - 0{,}575$
  $= 0{,}92u_n + 0{,}575 - 0{,}575 = 0{,}92u_n$
- $u_0 = a_0 - 0{,}625 = 0{,}3 - 0{,}626 = -0{,}325$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $u_0 = -0{,}325$.

b. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $u_0 = -0{,}325$ donc, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = -0{,}375 \times 0{,}92^n$.

Comme $a_n = u_n + 0{,}625$, on déduit que pour tout n, $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.

c. $0 < 0{,}92 < 1$ donc, d'après le cours, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (0{,}92)^n = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0{,}625$.

Cela signifie que la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A va tendre vers 62,5 %.

3. On résout l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}5$.

$$\begin{aligned} a_n \geqslant 0{,}5 \iff & -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625 \geqslant 0{,}5 & \iff & 0{,}125 \geqslant 0{,}325 \times 0{,}92^n \\ \iff & \frac{0{,}125}{0{,}325} \geqslant 0{,}92^n & \iff & \ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right) \geqslant \ln\left(0{,}92^n\right) \\ \iff & \ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right) \geqslant n \times \ln(0{,}92) & \iff & \frac{\ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right)}{\ln(0{,}92)} \leqslant n \end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}125}{0{,}325}\right)}{\ln(0{,}92)} \approx 11{,}5$, on retrouve le nombre $N = 12$ obtenu à la fin de l'exécution de l'algorithme.

Exercice 4 **4 points**

1. Un caractère est présent dans une population selon une proportion $p = 0{,}1$.

Dans un échantillon de 400 personnes, on observe ce caractère sur 78 individus.

Affirmation 1 : Au seuil de 95 %, cet échantillon est représentatif de la population totale pour ce caractère.

La proportion est $p = 0{,}1$ et la taille de l'échantillon est $n = 400$.
$n = 400 \geqslant 30$, $np = 40 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 360 \geqslant 5$ donc les conditions sont vérifiées pour que l'on puisse établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de ce caractère :

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
$$= \left[0{,}1 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1\times 0{,}9}{400}}\ ;\ 0{,}1 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1\times 0{,}9}{400}}\right] = [0{,}0707\ ;\ 0{,}1294]$$

Dans l'échantillon considéré, la fréquence du caractère est $f = \dfrac{78}{400} = 0{,}195$.
Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle calculé donc on peut considérer, au risque de 5 %, que l'échantillon n'est pas représentatif de la population totale pour ce caractère.
Affirmation 1 fausse

2. Dans une gare, le temps d'attente à un guichet donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;\,7]$.

Affirmation 2 : Le temps d'attente moyen à ce guichet est de 4 minutes.

Si le temps d'attente à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ .Le temps d'attente moyen à ce guichet est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.
Donc si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1\ ;\ 7]$, l'espérance mathématique qui donne le temps d'attente moyen est $E(X) = \dfrac{1+7}{2} = 4$.
Affirmation 2 vraie

3. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

Affirmation 3 : La valeur moyenne de g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ est égale à $\dfrac{16}{3}$.

La valeur moyenne de g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ est égale à
$$\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\left[\frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{8}{3} - \frac{-8}{3}\right] = \frac{1}{4}\times\frac{16}{3} = \frac{4}{3} \neq \frac{16}{3}$$
Affirmation 3 fausse

4. x désigne un nombre réel négatif.

Affirmation 4 : $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ est un nombre positif quel que soit le nombre réel x.

Pour tout x, $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right) - \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = \ln\dfrac{\mathrm{e}^{x+1}}{\mathrm{e}^{x}} = \ln \mathrm{e}^{1} = 1 > 0$
Affirmation 4 vraie