Durée : 3 heures

Baccalauréat Terminale ES/L – Amérique du Nord 29 mai 2018

Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point. Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et indiquerez la seule réponse choisie.

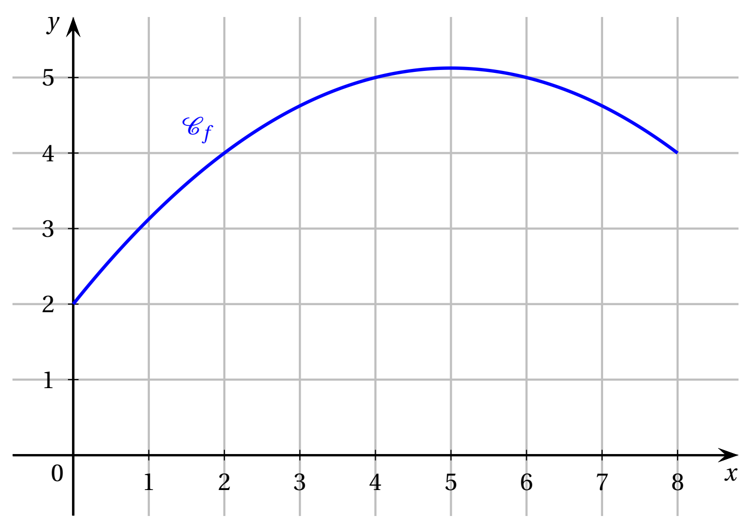
1. Un pépiniériste cultive des bulbes de fleurs. La probabilité qu'un bulbe germe, c'est-à-dire qu'il donne naissance à une plante qui fleurit, est de 0,85.

   Il prélève au hasard 20 bulbes du lot. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 bulbes.

   On peut affirmer que :

A.	La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de 0,103.
B.	La probabilité qu'au maximum 15 bulbes germent est proche de 0,067.
C.	La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de 0,830.
D.	La probabilité qu'au minimum 15 bulbes germent est proche de 0,933.

2. On considère une fonction f définie sur $[0\,;8]$ dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-dessous :



A. $8 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 9$	**B.** $9 \leqslant \displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 10$
C. $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = f(4) - f(2)$	**D.** $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$

3. On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.

   Une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$ est la fonction G définie par :

A. $G(x) = \ln(x)$	**B.** $G(x) = x\ln(x)$
C. $G(x) = x\ln(x) - x$	**D.** $G(x) = \dfrac{1}{x}$

4. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x) > 0$ est :

A. $]0\,;\,+\infty[$	**B.** $]0\,;\,1[$
C. $]1\,;\,+\infty[$	**D.** $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$

Exercice 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Le site internet « ledislight.com » spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles : un premier modèle dit d'« intérieur » et un deuxième modèle dit d'« extérieur ». Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux. Le responsable internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux.
Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur ?

Rappel : *lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence d'apparition de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donnée par :*

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux.
Donner un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95 %.

Partie B

À partir d'une étude statistique réalisée sur de nombreux mois, on peut modéliser le nombre de rubans LED d'intérieur vendus chaque mois par le site à l'aide d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 2\,500$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

1. Quelle est la probabilité que le site internet vende entre 2 100 et 2 900 rubans LED d'intérieur en un mois ?

2. **a.** Trouver, arrondie à l'entier, la valeur de a telle que $P(X \leqslant a) = 0{,}95$.
b. Interpréter la valeur de a obtenue ci-dessus en termes de probabilité de rupture de stock.

Partie C

On admet maintenant que :

- 20 % des rubans LED proposés à la vente sont d'extérieur ;
- 5 % des rubans LED d'extérieur sont défectueux.

On prélève au hasard un ruban LED dans le stock.
On appelle :

- E l'évènement : « le ruban LED est d'extérieur » ;
- D l'évènement : « le ruban LED est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, que l'on complètera au fur et à mesure.

2. Déterminer la probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux.

3. D'autre part on sait que 6 % de tous les rubans LED sont défectueux.
Calculer puis interpréter $P_{\overline{E}}(D)$.

Exercice 3 **5 points**
Candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité et candidats de L

Une société propose des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Le directeur de cette société remarque que, chaque année, 14 % des contrats supplémentaires sont souscrits et 7 sont résiliés.
En 2017, l'entreprise dénombrait 120 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n est le nombre de contrats souscrits l'année $2017+n$.
Ainsi on a $u_0 = 120$.

1. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1{,}14u_n - 7$.

b. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2018.

2. Compte tenu de ses capacités structurelles actuelles, l'entreprise ne peut prendre ne charge que 190 contrats. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.
On cherche donc à savoir en quelle année l'entreprise devra embaucher.
Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

```
n ⟵ 0
u ⟵ 120
Tant que .........
        n ⟵ n + 1
        .........
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.

b. Quelle est l'année affichée en sortie d'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 50$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 70 \times 1{,}14^n + 50.$$

c. Résoudre par le calcul l'inéquation $u_n > 190$.
Quel résultat de la question **2.** retrouve-t-on ?

Exercice 3 **5 points**
Candidats de ES ayant suivi la spécialité

Deux entreprises concurrentes « Alphacopy » et « Bêtacopy » proposent des contrats annuels d'entretien de photocopieurs. Ces deux entreprises se partagent le marché des contrats d'entretien sur un secteur donné.

Le patron de Alphacopy remarque que, chaque année :

- 15 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Alphacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Bêtacopy. Les autres restent fidèles à Alphacopy ;
- 25 % des clients qui avaient souscrit un contrat d'entretien chez Bêtacopy décident de souscrire un contrat d'entretien chez Alphacopy. Les autres restent fidèles à Bêtacopy.

On définit les évènements suivants :

- A : « le client est sous contrat avec l'entreprise Alphacopy » ;
- B : « le client est sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy ».

À partir de 2017, on choisit au hasard un client ayant un contrat d'entretien de photocopieurs et on note, pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Alphacopy l'année $2017+n$;
- b_n la probabilité que le client soit sous contrat avec l'entreprise Bêtacopy l'année $2017+n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2017+n$.
L'objectif de l'entreprise Alphacopy est d'obtenir au moins 62 % des contrats d'entretien des photocopieurs.

Partie A

1. Représenter le graphe probabiliste de cette situation et donner la matrice de transition M associée à ce graphe dont les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique.
2. Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0{,}625 & 0{,}375 \end{pmatrix}$ est l'état stable.
3. À votre avis, l'entreprise Alphacopy peut-elle espérer atteindre son objectif?

Partie B

En 2017, on sait que 46 % des clients ayant un contrat d'entretien de photocopieurs étaient sous contrat avec l'entreprise Alphacopy.
On a ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}46 & 0{,}54 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times M$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 0{,}25b_n$ puis que

$$a_{n+1} = 0{,}60a_n + 0{,}25.$$

2. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on cherche à déterminer en quelle année l'entreprise Alphacopy atteindra son objectif.

$n \leftarrow 0$
$a \leftarrow 0{,}46$
Tant que ....
  $n \leftarrow n+1$
  ....
Fin Tant que
Afficher $2017+n$

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.

b. Quelle est l'année en sortie de l'algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - 0{,}625$ pour tout entier naturel n.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_0.

b. Exprimer u_n en fonction de n puis démontrer que, pour tout entier n,

$$a_n = -0{,}165 \times 0{,}60^n + 0{,}625.$$

c. Résoudre par le calcul l'inéquation $a_n \geqslant 0{,}62$.
Quel résultat de la question **2.** retrouve-t-on ?

Exercice 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

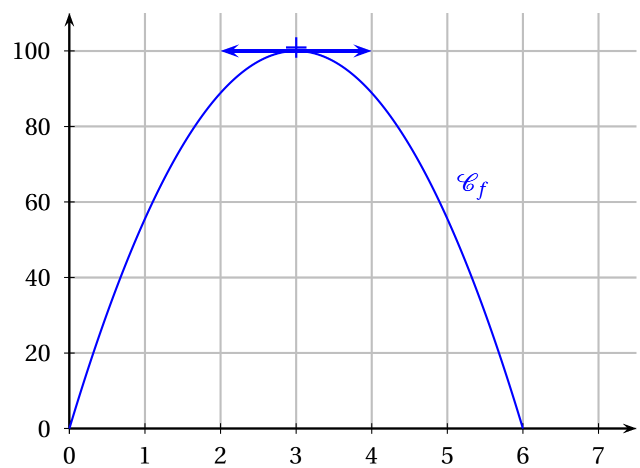
On appelle fonction « *satisfaction* » toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction « *satisfaction* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *saturation* ».
On définit aussi la fonction « *envie* » comme la fonction dérivée de la fonction « *satisfaction* ». On dira qu'il y a « *souhait* » lorsque la fonction « *envie* » est positive ou nulle et qu'il y a « *rejet* » lorsque la fonction « *envie* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *satisfaction* » différent.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *satisfaction* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « *saturation* ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *rejet* ».

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *satisfaction* » g est définie sur l'intervalle $[0; 30]$ par $g(x) = 12{,}5x\,\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 30]$,

$$g'(x) = (12{,}5 - 1{,}5625x)\,\mathrm{e}^{-0{,}125x+1}.$$

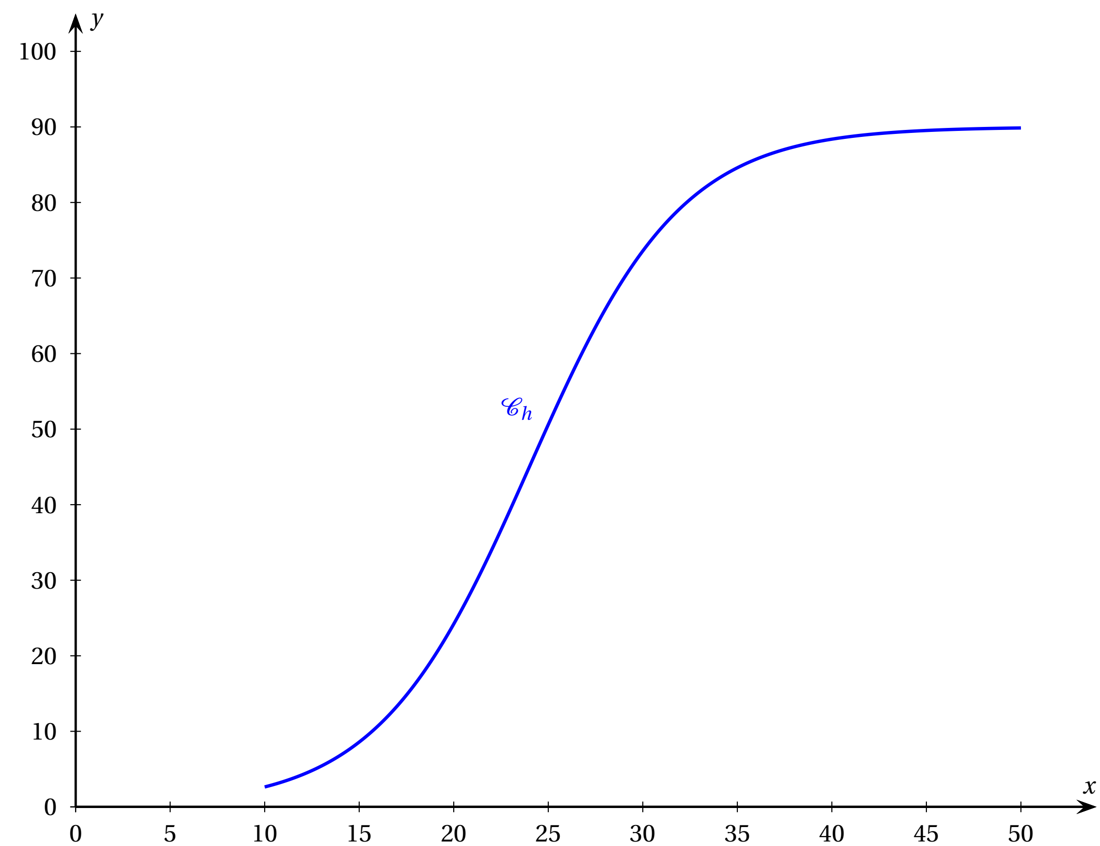
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0; 30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet « *saturation* » ?

Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « *satisfaction* » h, est définie sur l'intervalle $[10; 50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).
La courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	`Dériver(90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^2}$
2	`Dériver(22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))²` $\dfrac{5{,}625\,\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}(\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[10\,;\,50]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-0{,}25x+6}-1>0$.

3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10\,;\,50]$.

4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « *envie* » décroît ? Justifier.

5. Déterminer, en le justifiant, pour quel salaire annuel la fonction « *satisfaction* » atteint 80.
Arrondir au millier d'euros.