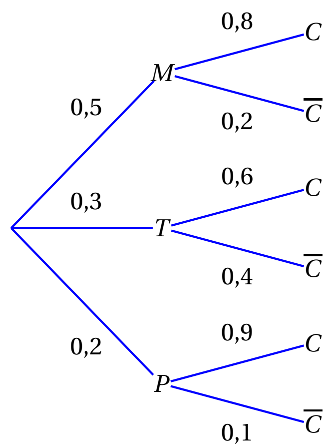
∾ Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 13 avril 2011 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $p(T) = 0,3$ et $P_T(C) = 0,6$.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. **a.** $M \cap C$ représente l'évènement « le client a pris un macaron **et** un café ».
   On a $p(M \cap C) = p(M) \times p_M(C) = 0,5 \times 0,8 = 0,4$.

   b. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(C) = p(M \cap C) + p(T \cap C) + p(P \cap C)$.
   $p(T \cap C) = p(T) \times p_T(C) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$;
   $p(P \cap C) = p(P) \times p_P(C) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$;
   Donc $p(C) = 0,4 + 0,18 + 0,18 = 0,76$.

4. Il faut trouver $p_C(M) = \dfrac{p(C \cap M)}{p(C)} = \dfrac{0,4}{0,76} = \dfrac{40}{76} = \dfrac{10}{19} \approx 0,53$ à 0,01 près.

5. **a.** $P + M + C$: $18 + 6 + 2 = 26$ € ;
   $P + M$: $18 + 6 = 24$ € ;
   $P + T + C$: $18 + 7 + 2 = 27$ € ;
   $P + T$: $18 + 7 = 25$ € ;
   $P + C$: $18 + 2 = 20$ € ;
   P : 18 €

   b.

Sommes s_i	18	20	24	25	26	27
$p(s_i)$	0,02	0,18	0,1	0,12	0,4	0,18

   c. $\text{E} = 18 \times 0,02 + 20 \times 0,18 + 24 \times 0,1 + 25 \times 0,12 + 26 \times 0,4 + 27 \times 0,18 = 24,62$ (€).
   Sur un grand nombre de repas la recette par client s'élève à 24,62 €.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. En utilisant les données et le graphique, préciser :

a. On lit $f(0) = 3$ et $f'(0) = \dfrac{2}{1} = 2$.

b. Il semble que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

2. $M(x\,;\,y) \in \mathrm{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 3 = 2x \iff y = 2x+3$.

3. On voit que l'aire est comprise entre 3 et 4 unités d'aire.

4. **a.** $f'(x) = \dfrac{a\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(ax+b)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(a-b-ax)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{a-b-ax}{\mathrm{e}^x}$;

b. $f(0) = 3 \iff 1 + \dfrac{b}{\mathrm{e}^0} = 3 \iff 1 + b = 3 \iff b = 2$;

$f'(0) = 2 \iff \dfrac{a-b}{\mathrm{e}^0} = 2 \iff a - 2 = 2 \iff a = 4$. Finalement :

$$f(x) = 1 + \frac{4x+2}{\mathrm{e}^x}.$$

5. La fonction étant positive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ est égale à :

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = 1 + \frac{-4\times 1 - 6}{\mathrm{e}^1} - \left[0 + \frac{-4\times 0 - 6}{\mathrm{e}^0}\right] =$

$1 - \dfrac{10}{\mathrm{e}} + 6 = 7 - \dfrac{10}{\mathrm{e}}$ (u. a.).

On a $7 - \dfrac{10}{\mathrm{e}} \approx 3,3$: le résultat est cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 3.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. **a.** $x_{\mathrm{G}} = \dfrac{1+2+3+4}{4} = 2,5$ et $y_{\mathrm{G}} = \dfrac{40+45+55+70}{4} 52,5$

b. Les coordonnées du point G doivent vérifier l'équation de la droite d'ajustement ; or $9\times 2,5 + 29 = 51,5 \neq 52,5$, alors que $10\times 2,5 + 27,5 = 52,5$.
Seule l'équation $y = 10x + 27,5$ peut convenir.

c. Voir sur l'annexe.

2.
- Par le calcul : pour $x = 8$, on obtient $y = 10\times 8 + 27,5 = 107,5$.
- Graphiquement : on obtient sensiblement le même résultat.

PARTIE B

1. Voir l'annexe.
Compte tenu de l'allure du nuage, un ajustement exponentiel semble approprié.

2. **a.** La calculatrice donne avec des coefficients arrondis au centième :
$z = 0,25x + 3,33$.

b. On a $z = \ln y = 0,25x + 3,33 \iff y = \mathrm{e}^{0,25x+3,33} = \mathrm{e}^{3,33}\times \mathrm{e}^{0,25x} \approx 27,94\mathrm{e}^{0,25x}$.
Au centième près on a donc $y = 27,94\mathrm{e}^{0,25x}$.

c. Avec $x = 8$,avec cet ajustement on a donc $y = 27,94\mathrm{e}^{0,25\times 8} = 27,94\mathrm{e}^2 \approx 206,45$.
Le nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine sera de 206 450 à peu près.
Avec l'ajustement affine il faut trouver x tel que :
$10x + 27,5 = 206,45 \iff 10x = 178,95 \iff x = 17,895$.
Il faudra attendre le 18[e] jour.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On cherche s'il existe une chaîne eulérienne.
   La chaîne A-B-D-F-H-G-E-C contient tous les sommets du graphe.
   Donc pour toute paire de sommets il existe un chemin les reliant : le graphe est connexe.
   Les sommets B et E sont les seuls de degré impair : il existe donc une chaîne eulérienne partant de l'un d'eux et finissant à l'autre ; par exemple : B-A-C-D-F-H-G-E (ou inversement).
2. Le terme situé à la deuxième ligne et à la huitième colonne est 3 : il donne le nombre de chemins de longueur 3 partant de B et arrivant en H : B-C-E-H ; B-C-D-H ; B-D-F-H.
3. On utilise l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A 0
	300 A	500 A	∞c	∞	∞	∞	∞	B 300
		500 A	700 B	∞	∞	∞	∞	C 500
			600 C	700 C	∞	∞	∞	D 600
				700 C	300 D	∞	1300 D	E 700
					1300 D	900 E	1000 E	G 900
					1300 D		1000 E	H 1000
					1200 H			F 1200

En partant de F on remonte ses prédécesseurs : F - H - E - C - A.
le trajet le plus court A - C- E - H - F a une longueur de 1 200 km.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. **a.** On a $R(2) = 3$, donc pour 200 litres la recette est de 3 000 €.
   b. Voir l'annexe 2.
2. **Lectures graphiques**

   a. Il y a bénéfice quand la recette est supérieure au coût total soit environ entre 65 et 450 litres vendus.
   b. Pour 200 litres, soit $x = 2$ on trouve une différence entre la courbe et la droite d'environ 1,75 soit 1 750 €.
   c. Il faut trouver graphiquement le segment vertical le plus long entre un point de la courbe et un point de la droite pour la même abscisse.
   On voit que ceci est réalisé pour $x = 2,75$ environ ce qui correspond à un bénéfice maximal de 2 150 €.
   Cette abscisse correspond au point de la courbe qui correspond à un coût marginal égal au prix de vente, et comme ce coût marginal est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe,il faut donc trouver un point de la courbe où la tangente est parallèle à la droite (recette). Voir la figure.

PARTIE B

1. On a $B(x) = R(x) - C_{\text{T}}(x) = 1,5x - \left(x^2 - 2x\ln(x)\right) = 1,5x - x^2 + 2x\ln(x)$.
$B(2) = 1,5 \times 2 - 2^2 + 2 \times 2\ln(2) = 4\ln(2) - 1 \approx 1,773$.
Pour 200 litres de médicaments commercialisés le bénéfice est de 1 773 €. C'est à peu près le résultat trouvé graphiquement.

2. Sur [0,25 ; 5], on a $B'(x) = 1,5 - 2x + \left(2\ln x + 2x \times \frac{1}{x}\right) = 2\ln x - 2x + 3,5$.

3.

x	$0,25$		1		5
$B'(x)$			$1,5$		
	y_1	$\nearrow$		$\searrow$	y_2

On précise les encadrements : $0,22 < y_1 < 0,23$ et $-3,29 < y_2 < -3,28$.

a. Sur [0,25 ; 5], B' est croissante, donc si $0,25 \leqslant x \leqslant 1$, $B'(x) \geqslant y_1$, donc en particulier $B'(x) > 0$.
Sur [1 ; 5], B' est continue, décroissante de 1,5 à $y_2 < 0$, donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un réel unique α de [1 ; 5] tel que $B'(\alpha) = 0$.
Donc l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0,25 ; 5]

b. D'après la question précédente :
$B'(x) > 0$ sur $[0,25\ ;\ \alpha[$; la fonction B est croissante sur cet intervalle ;
$B'(\alpha) = 0$, avec $\alpha \approx 2,77$;
$B'(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ 5]$; la fonction B est décroissante sur cet intervalle.

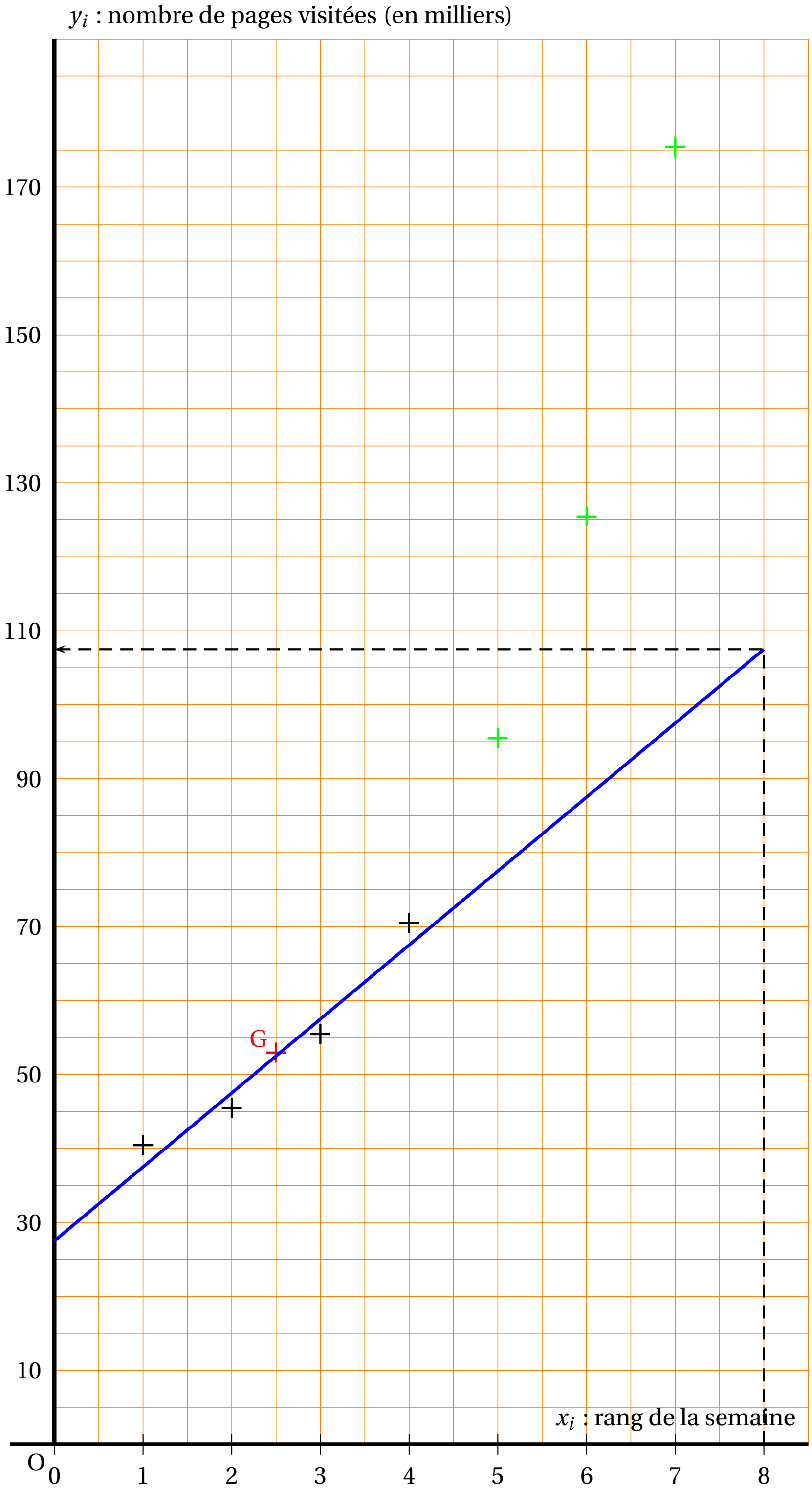
4. **a.** Le maximum de la fonction B est atteint en α et ce maximum est égal à :

$$B(\alpha) \approx 1,5 \times 2,77 - 2,77^2 + 5,54\ln(2,77) \approx 2,127.$$

Pour à peu près 277 litres de médicaments, le bénéfice maximal est de 2 127 €.

b. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A

ANNEXE 1
Exercice 3
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie



ANNEXE 2
Exercice 4
À rendre avec la copie