☙ Corrigé du baccalauréat ES Pondichéry 16 avril 2008 ❧

EXERCICE 1 **4 points**

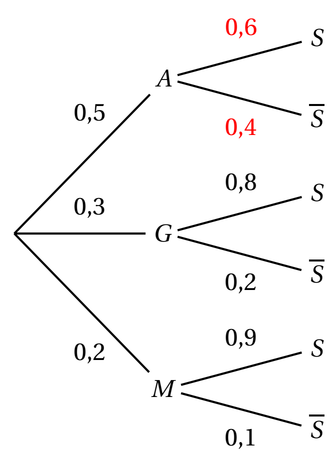
Commun à tous les candidats

1. Si t est le pourcentage de baisse, on doit avoir :
   $(1+0,6)\times(1-t)=1 \iff 1-t=\dfrac{1}{1,6} \iff t=1-\dfrac{1}{1,6}=0,375$ soit une baisse de 37,5 %.
2. On a $\text{P}(\text{A}\cup\text{B}) = p(\text{A})+p(\text{B})-p(\text{A}\cap\text{B}) = p(\text{A})+p(\text{B})-p(\text{A})\times p(\text{B})$ car les évènements sont indépendants.
   Donc $\text{P}(\text{A}\cup\text{B}) = 0,3+0,5-0,15=0,65$.
3. On a $f(x)-(2x-1)=\dfrac{1}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=0$, ce qui signifie que la droite dont une équation est $y=2x-1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de plus l'infini.
4. $\text{A} = 2\ln \text{e} - 2\ln 4 + 5\ln 2 + \ln 8 - \ln \text{e} = \ln \text{e} - 2\ln 2^2 + 5\ln 2 + \ln 2^3 =$
   $1 - 4\ln 2 + 5\ln 2 + 3\ln 2 = 1 + 4\ln 2$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.



2. **a.** $G\cap S$: « le client a choisi la destination G et a été satisfait » ;
   $M\cap S$: « le client a choisi la destination M et a été satisfait » ;
   $p(G\cap S) = p(G)\times p_G(S) = 0,3\times 0,8 = 0,24$;
   $p(M\cap S) = p(M)\times p_M(S) = 0,2\times 0,9 = 0,18$.

   b. On a donc $p(S)=0,72$. D'après la loi des probabilités totales on a :
   $p(S) = p(A\cap S)+p(G\cap S)+p(M\cap S) \iff$
   $p(A\cap S) = p(S)-p(G\cap S)-p(M\cap S) = 0,72-0,24-0,18=0,3$.

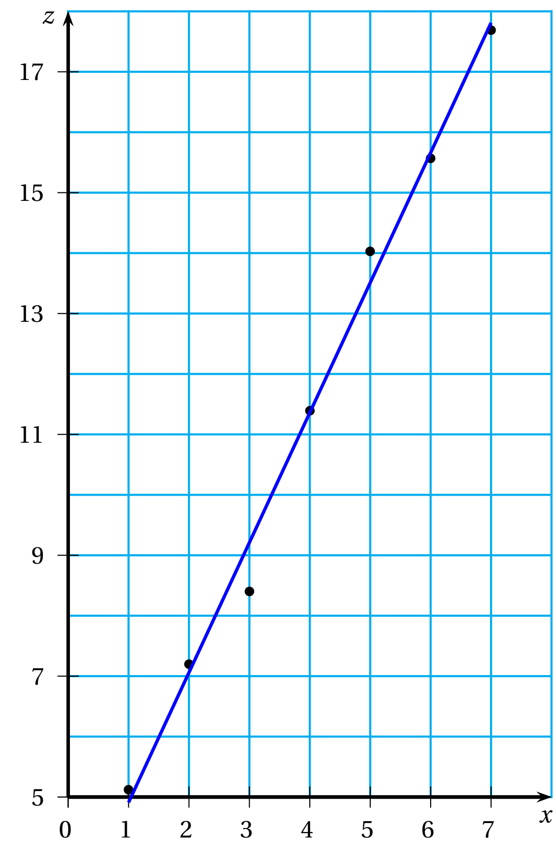
   c. $p_A(S) = \dfrac{p(A\cap S)}{p_A} = \dfrac{0,3}{0,5} = 0,6$.
3. Il faut trouver $p_S(G) = \dfrac{p(S\cap G)}{p(S)} = \dfrac{0,24}{0,72} = \dfrac{1}{3}$.
4. On a une épreuve de Bernoulli avec $n=3$ et $p=p\left(\overline{S}\right) = 1-0,72=0,28$.
   La probabilité que les trois soient insatisfaits est $0,28^3 = 0,021\,952 \approx 0,022$ au millième près.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1.

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12	7,20	8,40	11,39	14,03	15,57	17,69

2.



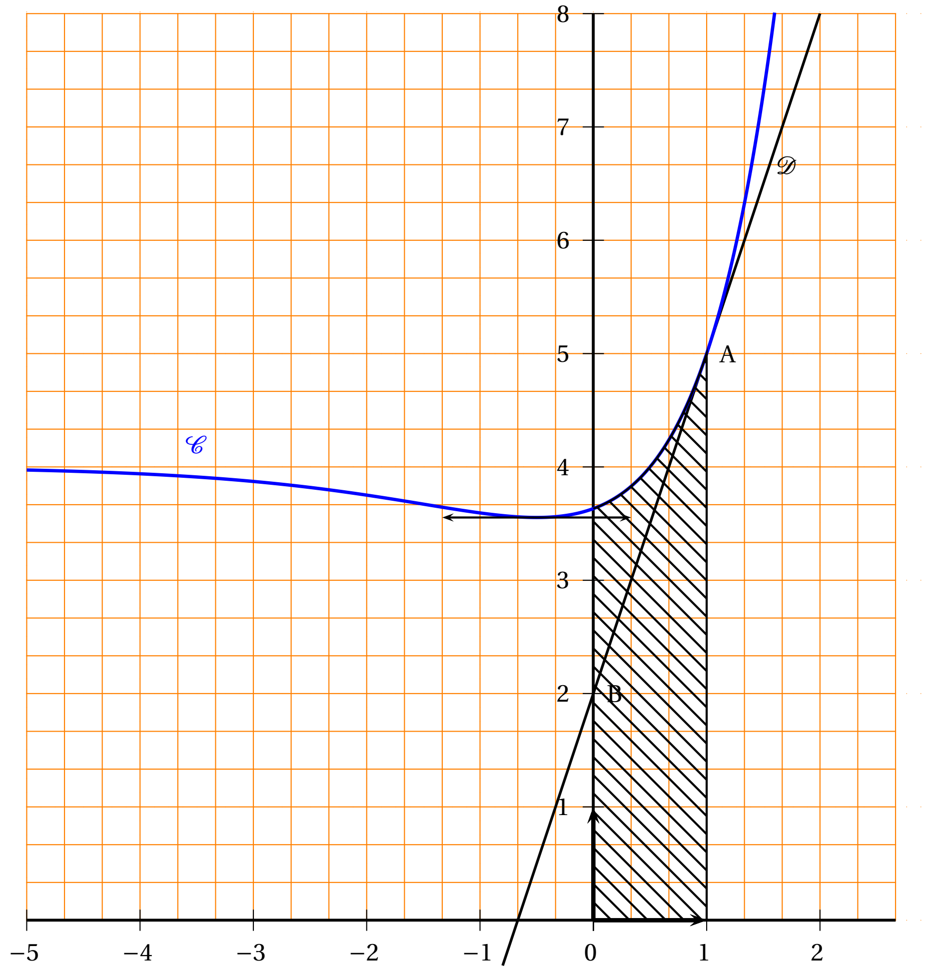
Un ajustement affine paraît approprié car les points sont pratiquement alignés.

3. La calculatrice donne avec des coefficients arrondis au centième :
$z = 2,15x + 2,76$

4. $x = 900$ correspond à $z = \sqrt{900} - 3 = 30 - 3 = 27$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$2,15x + 2,76 > 27 \iff 2,15x > 24,24 \iff x > \dfrac{24,24}{2,15} \approx 11,3$.
Il faut donc attendre 2012 qui correspond à $x = 12$ selon cet ajustement pour que l'effectif de ce centre d'appel dépasse 900 employés.

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats



Partie A

1. **a.** On lit $f(1) = 5$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

   b. Coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$: $\dfrac{y_{\text{A}} - y_{\text{B}}}{x_{\text{A}} - x_{\text{B}}} = \dfrac{5-2}{1-0} = 3$.

   Ce coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(1) = 3$.

2. De $f(x) = (ax+b)\text{e}^{x-1} + c$, on déduit que :
   $f'(x) = a\text{e}^{x-1} + (ax+b) \times 1\text{e}^{x-1} = \text{e}^{x-1}(a + ax + b) = \text{e}^{x-1}(ax + a + b)$.

3. Les trois données $f(1) = 5$, $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ et $f'(1) = 3$ se traduisent par le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{e}^0(a+b)+c & = & 5\\ \text{e}^{-\frac{1}{2}-1}\left(a\times\left(-\frac{1}{2}\right)+a+b\right) & = & 0\\ \text{e}^0(a\times 1+a+b) & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 5\\ \text{e}^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{a}{2}+b\right) & = & 0\\ 2a+b & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 5\\ \frac{a}{2}+b & = & 0\\ 2a+b & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 5\\ a+2b & = & 0\\ 2a+b & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 5\\ 2a+4b & = & 0\\ 2a+b & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 5\\ 3b & = & -3\\ a+2b & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit $b = -1$ puis $a = -2b = +2$ et enfin $c = 5 - (a + b) = 5 - (2 - 1) = 4$.
Finalement : $f(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{x-1} + 4$.

Partie B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel x, $f(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{x-1} + 4$.

1. a. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(2x - 1) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{X} = +\infty$ (avec $X = x - 1$), donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = +\infty$.

b. $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x-1}+4 = f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-1}+4 = 2x\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-1}+4 = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{x}+4$.
On sait que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{x} = 0$ d'où par somme de limites
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$.
Graphiquement ce résultat montre que la droite dont une équation est $y = 4$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

2. a. Sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2\mathrm{e}^{x-1} + (2x - 1) \times 1\mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^{x-1}(2x - 1 + 2) = \mathrm{e}^{x-1}(2x + 1)$.

b. Comme $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x + 1$.
Si $x < -\frac{1}{2}$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$.
Si $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
La fonction décroit de 4 (non atteinte) à $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 4 \approx 3,55$, puis croit de $f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ à plus l'infini.
Le minimum de la fonction est supérieure à zéro : la fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel x.

c. On a vu que pour $x < -\frac{1}{2}$, $f(x) < 4$: il n'y a donc pas de solution sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[$.
Par contre sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ la fonction est continue car dérivable et strictement croissante d'une valeur à peu près égale à $3,55 < 6$ à plus l'infini : d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 6$.
La calculatrice donne :
$f(1) = 5$ et $f(2) \approx 12,2$, donc $1 < \alpha < 2$;
$f(1,2) \approx 5,7$ et $f(1,3) \approx 6,2$, donc $1,2 < \alpha < 1,3$. *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Partie C

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$F'(x) = 2\mathrm{e}^{x-1} + (2x - 3)\mathrm{e}^{x-1} + 4 = \mathrm{e}^{x-1}(2x - 3 + 2) + 4 = (2x + 1)\mathrm{e}^{x-1} + 4 = f(x)$: F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction est positive, donc l'aire de la surface est égale à :
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1)-F(0) = (2\times1-3)\mathrm{e}^{1-1}+4\times1-\left[(2\times0-3)\mathrm{e}^{0-1}+4\times0\right] = -1+4+3\mathrm{e}^{-1} = 3 + 3\mathrm{e}^{-1} = 3\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \approx 4,1$ unités d'aire (ce que l'on vérifie visuellement sur la figure ci-dessus).