∽ Corrigé du baccalauréat ES Polynésie septembre 2011 ∾

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. **a.** Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ par produit de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

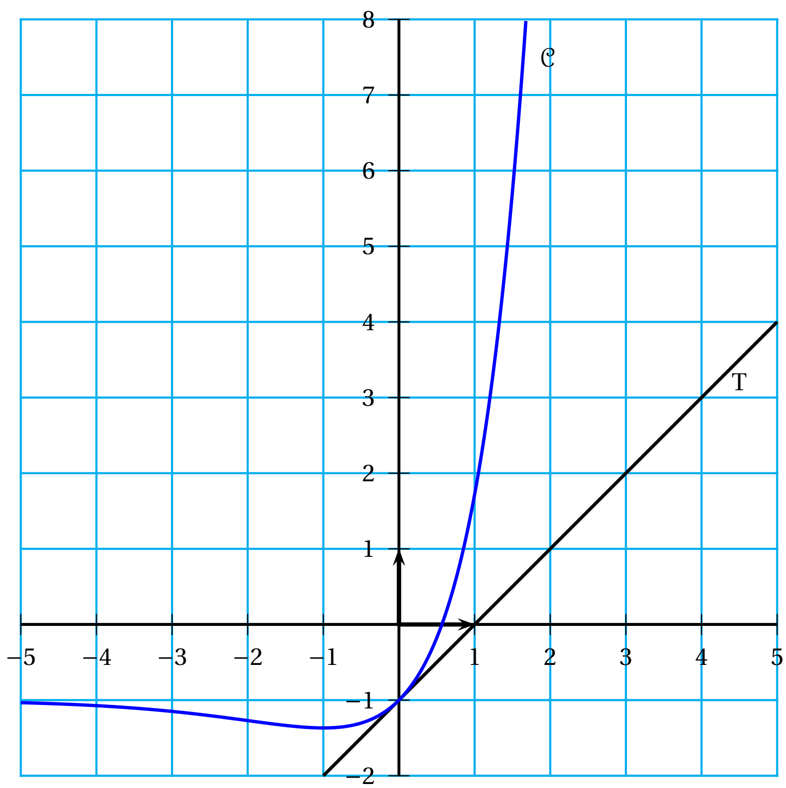
   b. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} = -1$.
   Graphiquement ceci signifie que la droite horizontale dont une équation est $y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de moins l'infini.

2. **a.** $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1+x) = (x+1)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $x+1$.
   $f'(x) = 0 \iff x = -1$;
   $f'(x) > 0 \iff x > -1$; f est croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$;
   $f'(x) < 0 \iff x < -1$; f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1[$.
   $f(-1) = -1 - 1\mathrm{e}^{-1} = -1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -1,37$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

3. Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, f est continue car dérivable, croissante de $f(0) = -1$ à $f(1) = -1 + \mathrm{e} \approx 1,718$; d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un réel unique de $[0\,;\,1]$, α tel que $f(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne :
   $f(0,5) \approx -0,2$ et $f(0,6) \approx 0,09$, donc $0,5 < \alpha < 0,6$;
   $f(0,56) \approx -0,02$ et $f(0,57) \approx 0,008$, donc $0,56 < \alpha < 0,57$.

4. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est :
   $y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - (-1) = 1 \times x \iff y = x - 1$.

5.



Il semble que la courbe est au dessus de la tangente

6. Considérons la fonction différence définie sur $\mathbb{R}$ par :
$d(x) = f(x) - (x-1) = -1 + x\mathrm{e}^{x} - x + 1 = x\mathrm{e}^{x} - x = x\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
Le second facteur s'annule pour $x = 0$ est positif pour $x > 0$ et négatif pour $x < 0$. On dresse le tableau de signe de $f(x)$ à partir de celui de ses facteurs :

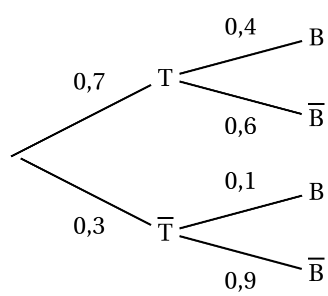
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{x} - 1$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$+$	0	$+$	

On a donc démontré que pour tout réel x, $\quad d(x) \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant (x-1)$ ce qui géométriquement montre que la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de la tangente T, le seul point de contact étant pour $x = 0$.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $p(\mathrm{T}) = 0,7$.
   b. $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{B}) = 0,4$ et $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{B}) = 0,10$.
2.



3. **a.** $p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{T}) \times p_{\mathrm{T}}(\mathrm{B}) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$.
   b. On a $p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) + p(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{B})$.
   $p(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{B}) = p\left(\overline{\mathrm{T}}\right) \times p_{\mathrm{B}} = 0,3 \times 0,1 = 0,03$. Donc
   $p(\mathrm{B}) = 0,28 + 0,03 = 0,31$.
4. Il faut calculer $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{T}) = \dfrac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{T})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{0,28}{0,31} = \dfrac{28}{31} \approx 0,903 \approx 0,90$.
5. $p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) = 0,28$ et $p(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{T}) = 0,31 \times 0,7 = 0,217 \neq 0,28$: les évènements ne sont pas indépendants.
6. $p(\mathrm{T} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{T}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{T} \cap \mathrm{B}) = 0,7 + 0,31 - 0,28 = 0,73$: c'est la probabilité qu'un ménage pratique le tri sélectif **ou** consomme des produits bio.
7. **a.** S peut prendre les valeurs 0, 10, ,20, 30.
   b.

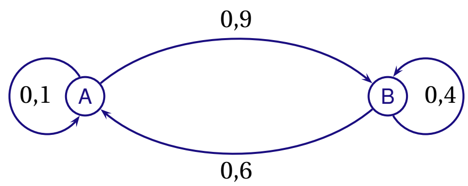
S	0	10	20	30
$p(S)$	0,27	0,03	0,42	0,28

c. On a $E = 0 \times 0,27 + 10 \times 0,03 + 20 \times 0,42 + 30 \times 0,28 = 0,3 + 8,4 + 8,4 = 17,10$ €.
Cette valeur est pour un grand nombre de ménages la moyenne des chèques attribués par ménage.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

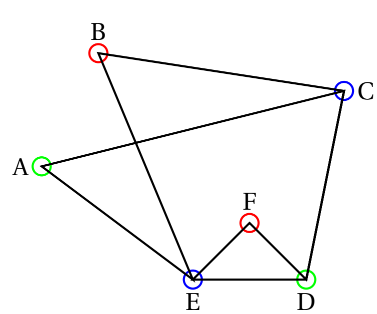
PARTIE A : Étude d'un graphe probabiliste

1. **a.** $P_1 = \begin{pmatrix}0,65 & 0,35\end{pmatrix}$.
   b.



2. **a.** $M^2 = \begin{pmatrix}0,55 & 0,45\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$.
   b. On a $P_3 = P_1 \times M^2 = \begin{pmatrix}0,65 & 0,35\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,1 & 0,9\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,4625 & 0,5375\end{pmatrix}$.
   Donc arrondie au centième, la probabilité que Bilal gagne la 3[e] partie est égale à 0,54.
   L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.
3. **a.** Avec $x + y = 1$, l'égalité $P = PM$ se traduit par :
$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,1 & 0,9\\ 0,6 & 0,4\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0,1x + 0,6y\\ y & = & 0,9x + 0,4y\\ x + y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,9x - 0,6y & = & 0\\ -0,9x + 0,6y & = & 0\\ x + y & = & 1\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} 0,9x - 0,6y & = & 0\\ x + y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 3x - 2y & = & 0\\ x + y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 3x - 2y & = & 0\\ 2x + 2y & = & 2\end{array}\right. \Rightarrow$$
$5x = 2 \iff x = \dfrac{2}{5}$ et par conséquent $y = \dfrac{3}{5}$.
   L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix}0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.
   b. Au bout d'un grand nombre de parties la probabilité de gagner est égale à 0,4 pour Alexis et par conséquent 0,6 pour Bilal.

PARTIE B : Détermination d'un nombre chromatique



1. Soit χ le nombre chromatique.
D-E-F est un sous-graphe complet d'ordre 3 donc $\chi \geqslant 3$.

2. E est le sommet de plus haut degré : 4, donc $\chi \leqslant 5$.
Conclusion $3 \leqslant \chi \leqslant 5$.

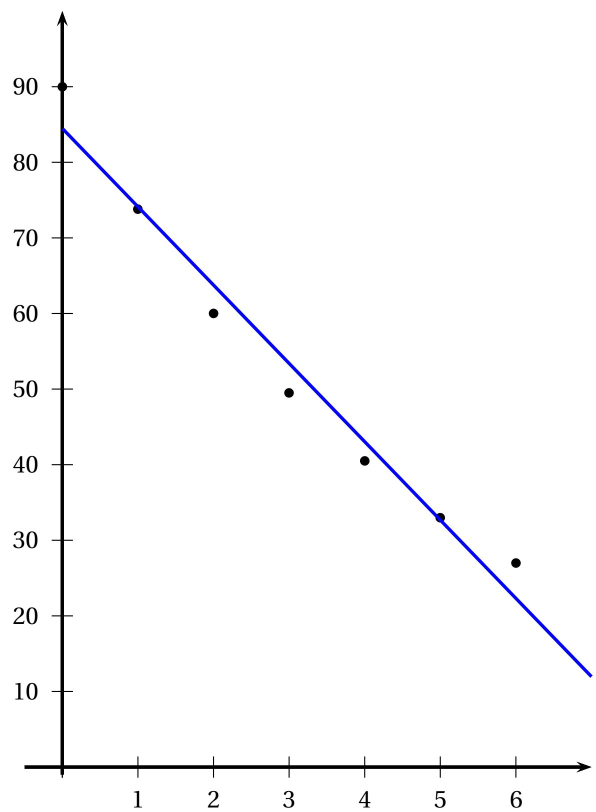
3. Voir ci-dessus. Le nombre chromatique est donc égal à 3.

4. D'après le résultat précédent une répartition des enfants faisant intervenir un nombre minimal d'équipes est possible : (A ; B ; D) (C ; E) et (F) ou (A ; D) (C ; E) et (B ; F) ou encore (B ; D) (C ; E) et (A ; F) soit à chaque fois 3 équipes.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. Le pourcentage de baisse du prix de revente de la machine au bout de six ans d'utilisation (de t_0 à t_6) est égal à $\dfrac{90-27}{90} \times 100 = 70\ \%$.

2. a.



b. La calculatrice donne $y = -10,36t + 84,48$ comme équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés.

c. Pour $t_{10} = 10$, on obtient $y = -10,36 \times 10 + 84,48 = 84,48 - 103,6 = -19,12$ soit un prix irréaliste de $-1\,912$ €. Cet ajustement affine n'est pas adapté pour le long terme.

3. Étude d'un modèle exponentiel

a.

Temps écoulé depuis l'achat t_i : $0 \leqslant i \leqslant 6$	0	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln(y_i)$	4,5	4,3	4,1	3,9	3,7	3,5	3,3

b. La calculatrice livre $z = -0,2t + 4,5$.

c. On a donc $z = \ln(y) = \iff y = \mathrm{e}^{-0,2t+4,5}$.

d. Avec $t = 10$, on obtient $y = \mathrm{e}^{-0,2\times 10+4,5} = \mathrm{e}^{2,5} \approx 12,18$. Avec cet ajustement exponentiel la valeur de revente au bout de 10 ans sera d'environ 1 218 € qui est proche de la valeur réelle 1 000 €. Ce modèle est mieux adapté au long terme.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Graphiquement on lit $f'(0) = -1,5$ et $f'(-3) = 0$.
2. On peut écarter $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_2$: en effet sur $[-3~;~-1]$, $f'(x) \geqslant 0$, donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ce qui n'est pas le cas de ces deux fonctions.

   Reste $\mathcal{C}_1$: on a bien $f'(-3) = f'(-1) = 0$, $f(0) \approx -1,5$ et la fonction est croissante sur $[-3~;~-1]$ et décroissante ailleurs.

   Seule $\mathcal{C}_1$ est susceptible d'être la représentation graphique de la fonction f.

Partie B

1. **a.** Pour $x > -4 \iff x+4 > 0$, $\ln(x+4)$ existe et

   $f'(x) = 2ax + \dfrac{b}{x+4}$.

   b. On sait que $\left\{\begin{array}{l c l} f'(-3) & = & 0\\ f'(-1) & = & 0\\ f'(0) & = & -1,5\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -6a + \dfrac{b}{-3+4} & = & 0\\ -2a + \dfrac{b}{-1+4} & = & 0\\ \dfrac{b}{4} & = & -1,5\end{array}\right. \iff$

   $\left\{\begin{array}{l c l} -6a+b & = & 0\\ -2a + \dfrac{b}{3} & = & 0\\ b & = & -6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -6a+b & = & 0\\ -6a+b & = & 0\\ b & = & -6\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -6a-6 & = & 0\\ b & = & -6\end{array}\right. \iff$

   $\left\{\begin{array}{l c l} a & = & -1\\ b & = & -6\end{array}\right.$.

   Conclusion : sur $]-4~;~+\infty[$, $f(x) = -x^2 - 6\ln(x+4)$.
2. **a.** On a $I = \left[f(x)\right]_{-3}^{-1} = f(-1) - f(-3) = -(-1)^2 - 6\ln(-1+4) - \left[-(-3)^2 - 6\ln(-3+4)\right] = -1 - 6\ln 3 + 9 = 8 - 6\ln 3 \approx 1,4$.

   b. On a vu que sur l'intervalle $[-3~;~-1]$ la fonction f' est positive, donc I représente l'aire en unité d'aire de la surface limitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = -1$).

   On peut constater sur la figure que cette aire vaut à peu près 1,5.