Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Polynésie septembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $\dfrac{128,927-105,045}{105,45}\times 100 \approx 22,6$ donc 23 % à 1 % près.

2. **a.** Les points ne sont manifestement pas « alignés ».

   On cherche alors un ajustement exponentiel.

   b.

Rang de l'année x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln y_i$	4,65	4,86	4,97	5,41	5,84	6,14	6,7	7,03

   c. En arrondissant les coefficients donnés par la calculatrice au centième, on obtient $z = 0,35x+4,10$.

   d. On a $z = \ln y = 0,35x+4,10 \iff y = \text{e}^{0,35x+4,1} \iff y = \text{e}^{4,1}\text{e}^{0,35x}$.
   Or $\text{e}^{4,1} \approx 60,340$, donc en arrondissant les coefficients au centième :
   $y = 60,34\text{e}^{0,35x}$.

3. **a.** 2009 correspond à $x = 9$, d'où $y = 60,34\text{e}^{0,35\times 9} = 60,34\text{e}^{3,15} \approx 1\,408,1$.
   D'après ce modèle exponentiel le nombre de domaines sera en 2009de 1 408 milliers.

   b. On a donc en 2009, 1 412,652 milliers de domaines au lieu de 1 408 prévus soit une erreur de :
   $\dfrac{1\,412,652-1\,408}{1\,412,652} \approx 0,0033 < 0,01$ soit 1 % : Donc pour 2009 ce modèle était pertinent.

4. **a.** $60,34\text{e}^{0,35x} \geqslant 10000 \iff \text{e}^{0,35x} \geqslant \dfrac{10\,000}{60,34} \iff 0,35x \geqslant \ln\left(\dfrac{10\,000}{60,34}\right) \iff x \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{10\,000}{60,34}\right)}{0,35}$. Or
   $\dfrac{\ln\left(\frac{10\,000}{60,34}\right)}{0,35} \approx 14,601$.
   L'ensemble des réels solutions est l'intervalle $[14,6\,;\,+\infty[$.

   b. 10 millions de domaines correspondent à 10 000 milliers domaines.
   Le résultat précédent permet de dire que d'après le modèle exponentiel le nombre de domaines dépassera 10 millions à partir de 2015.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

1. $p(T) = 0,25$; $p_T(S) = 0,1$; $p_{\overline{T}}(S) = 0,007$.
2. $p(T\cap S) = p(T)\times p_T(S) = 0,25\times 0,1 = 0,025$.
3. On a de même $p\left(\overline{T}\cap S\right) = p\left(\overline{T}\right)\times p_{\overline{T}}(S) = (1-0,25)\times 0,007 = 0,005\,25$.

   D'où $p(S) = p(T\cap S)+p\left(\overline{T}\cap S\right)$ (loi des probabilités totales) $= 0,025+0,005\,25 = 0,030\,25 \approx 0,03$ arrondie au centième.

4. La probabilité que l'accident se soit produit devant un témoin formé et que le malade survive est égale à 0,025.

Dans ce cas la probabilité que le malade survive est égale à 0,03 (au centième près).

5. Sur 55 000 accidents il y a donc en moyenne $55\,000 \times 0,03 = 1\,650$ survivants.

À noter que si on prend la probabilité exacte on obtient $55\,000 \times 0,030\,25 \approx 1\,664$ soit 14 survivants supplémentaires!

Partie 2

On a donc :
$p(S) = 0,5$; $p\left(\overline{T}\right) = 0,5$; $p_T(S) = 0,25$; $p_{\overline{T}}(S) = 0,046$.

On en déduit : $p(T \cap S) = 0,25 \times 0,5 = 0,125$; $p\left(\overline{T} \cap S\right) = 0,046 \times 0,5 = 0,023$.

D'où : $p(S) = p(T \cap S) + p\left(\overline{T} \cap S\right) = 0,125 + 0,023 = 0,148$.

D'où pour 55 000 accidents annuels un nombre de survivants égal à $55\,000 \times 0,148 \approx 8\,140$, soit $8\,140 - 1\,650 = 6\,490$ survivants supplémentaires. (12 % de plus).

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. a. Quand x tend vers 2, $f(x)$ tend vers moins l'infini : la droite $x = 2$ est donc asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

Quand x tend vers plus l'infini, $f(x)$ tend vers 4 : l'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}$.

b. Une équation de la tangente est $y - f(3) = f'(3)(x-3)$.

$f(3) = 6$; $f'(3) = 0$, d'où :

$y - 6 = 0(x-3) \iff y = 6$. (tangente horizontale)

c. Sur $[2\,;\,3]$, la fonction est continue car dérivable, croissante de moins l'infini à 6 : d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe un réel unique $x_0 \in [2\,;\,3[$ tel que $f(x_0) = 4$.

Pour les mêmes raisons il existe $x_1 \in]3\,;\,10[$ tel que $f(x_1) = 4$.

Par contre sur $[10\,;\,+\infty[$, $f(x) < 4$: pas de solution.

Conclusion : Sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 4$ a deux solutions.

2. a. $g(5) = \text{e}^{f(5)} = \text{e}^0 = 1$

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$ et on sait que $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \text{e}^X = 0$, donc par composition de limites $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x) = 0$.

c. La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, les variations de g sont celles de f.

g est donc croissante sur $]2\,;\,3[$ et sur $]10\,;\,+\infty[$ et décroissante sur $]3\,;\,10[$.

d. Une équation de la tangente est : $y - g(5) = g'(5)(x-5)$.

$g(5) = 1$ et $g'(x) = f'(x)\text{e}^{f(x)}$, d'où $g'(5) = f'(5)\text{e}^{f(5)} = -2 \times 1 = -2$.

D'où l'équation : $y - 1 = -2(x-5) \iff y = 2x + 10 + 1 \iff y = 2x + 11$.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Sur $[0\,;4]$, $x+1 \geqslant 1$, donc $\ln(x+1)$ existe : la fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :
$f'(x) = -2x-1+\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)(-2x-1)+1}{x+1} = \dfrac{-2x^2-x-2x-1+1}{x+1} = \dfrac{-2x^2-3x}{x+1}$
$f'(x) = -\dfrac{x(2x+3)}{x+1}$.
2. Sur $[0\,;4]$, $x \geqslant 0, x+1>0$ et $2x+3>0$, donc $f'(x) \leqslant 0$ et ne s'annule qu'en 0. La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\,;4]$.
3. f décroit de $f(0) = 4+\ln 1 = 4$ à $f(4) = -16-4+4+\ln 5 = \ln 5 - 16 \approx -14,4$.
Sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, f est continue car dérivable, strictement décroissante d'une valeur positive à une valeur négative ; d'après le théorème de la valeur intermédiaire il existe un réel unique $\alpha \in [0\,;\,4]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne :
$f(1) \approx 2,69$ et $f(2) \approx -0,9$, d'où $1 < \alpha < 2$;
$f(1,7) \approx 0,4$ et $f(1,8) \approx -0,01$ d'où $1,7 < \alpha < 1,8$;
$f(1,79) \approx 0,03$ et $f(1,80) \approx -0,01$ d'où $1,79 < \alpha < 1,80$.
4. $F'(x) = -\dfrac{1}{3} \times 3x^2 - \dfrac{1}{2} \times 2x+3+1\times \ln(x+1)+(x+1)\times \dfrac{1}{x+1} =$
$-x^2-x+3+\ln(x+1)+1 = -x^2-x+\ln(x+1)+4 = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur $[0\,;4]$.
5. **a.** Voir à la fin.
   b. On voit sur la figure que $3 < \mathcal{A} < 4$.
   c. Sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction f est positive car elle décroit de $f(0) = 4$ à $f(\alpha) = 0$ car $\alpha > 1$.
   Donc $\mathcal{A}$ l' aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est égale à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1)-F(0) = -\dfrac{1}{3}\times 1^3 - \dfrac{1}{2}\times 1^2+3\times 1+(1+1)\ln(1+1) - \left(-\dfrac{1}{3}\times 0^3 - \dfrac{1}{2}\times 0^2+3\times 0+(0+1)\ln(0+1)\right) =$
   $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+3+2\ln 2 =$
   $\dfrac{-2-3+18}{6}+2\ln 2 = \dfrac{13}{6}+2\ln 2 \approx 3,552$ unités d'aire. Ceci correspond bien à la lecture graphique.

ANNEXE à rendre avec la copie
Exercice 4